

MINISTERIO DE
educación

ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA



VICEMINISTERIO DE EDUCACIÓN SUPERIOR DE FORMACIÓN PROFESIONAL
VICEMINISTERIO DE EDUCACIÓN REGULAR

PROGRAMA DE FORMACIÓN COMPLEMENTARIA
PARA MAESTRAS Y MAESTROS EN EJERCICIO

PROFOCOM



Unidad de Formación No. 15

Matemática

Modelización Matemática de los fenómenos sociales y naturales

(Educación Regular)

Documento de Trabajo





© De la presente edición:

Colección:

CUADERNOS DE FORMACIÓN COMPLEMENTARIA

Unidad de Formación No. 15

Matemática

Modelización Matemática de los fenómenos sociales y naturales

Documento de Trabajo

Coordinación:

Viceministerio de Educación Superior de Formación Profesional

Viceministerio de Educación Regular

Dirección General de Formación de Maestros

Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

Unidad de Políticas Intraculturales, Interculturales y Plurilingüe

Redacción y Dirección:

Equipo PROFOCOM

ESFMTHEA

ESFM Andrés de Santa Cruz y Calahumana

ESFM Simón Bolívar

Cómo citar este documento:

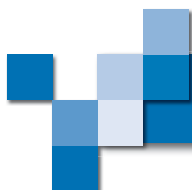
Ministerio de Educación (2014). *Unidad de Formación Nro. 15 “Matemática - Modelización Matemática de los fenómenos sociales y naturales”*. Cuadernos de Formación Continua. Equipo PROFOCOM. La Paz, Bolivia.

Diseño

Franklin Nina

LA VENTA DE ESTE DOCUMENTO ESTÁ PROHIBIDA

Denuncie al vendedor a la Dirección General de Formación de Maestros, Telf. 2912840 - 2912841



Índice

Presentación	3
Introducción	5
Objetivo holístico	6
Criterios de evaluación.....	6
Uso de lenguas indígena originarias	6
Momento 1	
Sesión presencial.....	7
Momento 2	
Sesiones de construcción crítica y concreción educativa	16
I. Actividades de autoformación	16
Tema 1: El lenguaje de la matemática en los medios de comunicación.....	16
Tema 2: Funciones, representación gráfica y aplicación de la matemática.....	23
Tema 3: Modelización trigonométrica en las ciencias.....	44
II. Actividades de formación comunitaria	59
III. Actividades de concreción educativa	59
Momento 3	
Sesión presencial de socialización.....	61
Producto de la unidad de formación.....	61





Presentación

El Programa de Formación Complementaria para Maestras y Maestros en Ejercicio (PROFOCOM) es un programa que responde a la necesidad de transformar el Sistema Educativo a partir de la formación y el aporte de las y los maestros en el marco del Modelo Educativo Sociocomunitario Productivo y de la Ley de la Educación N° 070 “Avelino Siñani - Elizardo Pérez” que define como objetivos de la formación:

1. Formar profesionales críticos, reflexivos, autocríticos, propositivos, innovadores, investigadores; comprometidos con la democracia, las transformaciones sociales, la inclusión plena de todas las bolivianas y los bolivianos.
2. Desarrollar la formación integral de la maestra y el maestro con alto nivel académico, en el ámbito de la especialidad y el ámbito pedagógico, sobre la base del conocimiento de la realidad, la identidad cultural y el proceso sociohistórico del país (Art. 33).

Así entendido, el PROFOCOM busca fortalecer la formación integral y holística, el compromiso social y la vocación de servicio de maestras y maestros en ejercicio, mediante la implementación de procesos formativos orientados a la aplicación del currículo del Sistema Educativo Plurinacional, que concrete el Modelo Educativo Sociocomunitario Productivo aportando en la consolidación del Estado Plurinacional.

Este programa es desarrollado en todo el Estado Plurinacional como un proceso sistemático y acreditable de formación continua. La obtención del grado de Licenciatura será equivalente al otorgado por las Escuelas Superiores de Formación de Maestras y Maestros (ESFM) y/o el grado de Maestría equivalente al otorgado por la Universidad Pedagógica “Mariscal Sucre” (UPMS), articulado a la apropiación e implementación del currículo base del Sistema Educativo Plurinacional.

Son las Escuelas Superiores de Formación de Maestras y Maestros, Unidades Académicas y la Universidad Pedagógica las instancias de la implementación y acreditación del PROFOCOM, en el marco del currículo de formación de maestras y maestros del Sistema Educativo Plurinacional, orientando todos los procesos formativos hacia una:

- ◆ *Formación Descolonizadora*, que busca a través del proceso formativo lidiar contra todo tipo de discriminación étnica, racial, social, cultural, religiosa, lingüística, política y económica, para garantizar el acceso y permanencia de las y los bolivianos en el sistema educativo, promoviendo igualdad de oportunidades y equiparación de condiciones a través del conocimiento de la historia de los pueblos, de los procesos liberadores de cambio y superación de estructuras mentales coloniales,



la revalorización y fortalecimiento de las identidades propias y comunitarias, para la construcción de una nueva sociedad.

- ◆ *Formación Productiva*, orientada a la comprensión de la producción como recurso pedagógico para poner en práctica los saberes y conocimientos como un medio para desarrollar cualidades y capacidades articuladas a las necesidades educativas institucionales en complementariedad con políticas estatales. La educación productiva territorial articula a las instituciones educativas con las actividades económicas de la comunidad y el Plan Nacional de Desarrollo.
- ◆ *Formación Comunitaria*, como proceso de convivencia con pertinencia y pertenencia al contexto histórico, social y cultural en que tiene lugar el proceso educativo. Esta forma de educación mantiene el vínculo con la vida desde las dimensiones material, afectiva y espiritual, generando prácticas educativas participativas e inclusivas que se internalizan en capacidades y habilidades de acción para el beneficio comunitario. Promueve y fortalece la constitución de Comunidades de Producción y Transformación Educativa (CP-TE), donde sus miembros asumen la responsabilidad y corresponsabilidad de los procesos y resultados formativos.
- ◆ *Formación Intracultural, Intercultural y Plurilingüe*, que promueve la autoafirmación, el reconocimiento, fortalecimiento, cohesión y desarrollo de la plurinacionalidad; asimismo, la producción de saberes y conocimientos sin distinciones jerárquicas, y el reconocimiento y desarrollo de las lenguas originarias que aporta a la intraculturalidad como una forma de descolonización y a la interculturalidad estableciendo relaciones dialógicas, en el marco del diseño curricular base del Sistema Educativo Plurinacional, el currículo regionalizado y el currículo diversificado.

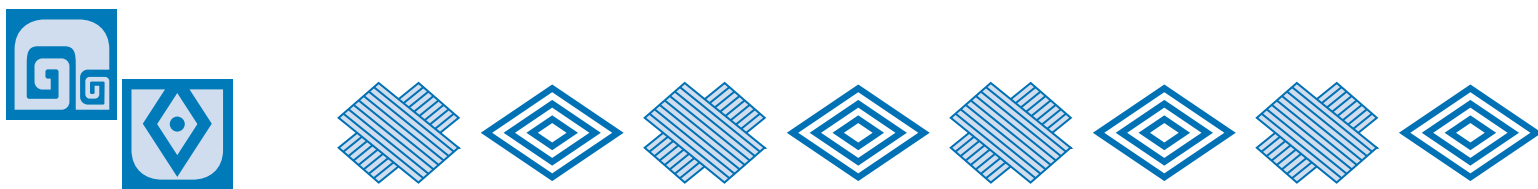
Este proceso permitirá la autoformación de los participantes en Comunidades de Producción y Transformación Educativa (CP-TE), priorizando la reflexión, el análisis, la investigación desde la escuela a la comunidad, entre la escuela y la comunidad, con la escuela y la comunidad; hacia el desarrollo armónico de todas las potencialidades y capacidades, valorando y respetando sus diferencias y semejanzas, así como garantizado el ejercicio pleno de los derechos fundamentales de las personas y colectividades, y los derechos de la Madre Tierra en todos los ámbitos de la educación.

Se espera que esta colección de Cuadernos, que ahora presentamos, puedan ser textos de apoyo en los que, tanto facilitadores como participantes, puedan encontrar:

- ◆ Los objetivos orientadores del desarrollo y la evaluación de cada Unidad de Formación.
- ◆ Los contenidos curriculares mínimos.
- ◆ Los lineamientos metodológicos concretados en sugerencias de actividades y orientaciones para la incidencia en la realidad educativa en la que se ubica cada participante.

Si bien estos Cuadernos serán referencia básica para el desarrollo de las Unidades de Formación, cada equipo de facilitadores debe enriquecer, regionalizar y contextualizar los contenidos y las actividades propuestas de acuerdo a su experiencia y a las necesidades específicas de las maestras y maestros.

Roberto Aguilar Gómez
MINISTRO DE EDUCACIÓN





Introducción

En la misma orientación de la Unidad de Formación No. 14 se trabajan procesos de articulación y profundización de las Áreas de saberes y conocimientos.

En este sentido, en el Momento I (Sesión Presencial) se desarrolla el proceso metodológico de articulación de los saberes y conocimientos de las Áreas a través de un “acontecimiento” narrado y/o problemática de la realidad, el cual es problematizado a partir de los sentidos de los campos y el enfoque de las Áreas para vincular esa problemática con los procesos educativos que desarrollan las y los maestros. Esta parte de la Unidad de Formación muestra la importancia de la problematización y de las preguntas para promover un uso crítico de los contenidos que puedan abrirse a las exigencias de la realidad.

Es necesario aclarar que la utilización del “acontecimiento” como un elemento articulador obedece sólo a fines didácticos del proceso formativo del PROFOCOM, por lo que no es un nuevo elemento de la estructura curricular. Queda claro que en el desarrollo curricular de los niveles del Subsistema de Educación Regular el elemento articulador predominante es el Proyecto Socioproductivo.

Para el Momento II (de construcción crítica y concreción educativa), en las actividades de autoformación trabajamos tres temas o contenidos formativos del Área o especialidad para su profundización. Los temas son abordados mediante preguntas y están orientados a promover la reflexión crítica a partir de lecturas de textos, propuestas para este fin. En esta parte, seguiremos trabajando la problematización de nuestras Áreas de Saberes y Conocimientos para perfilar los enfoques de Área que propone el Modelo Educativo Sociocomunitario Productivo para su abordaje.

Por último, la presente Unidad de Formación plantea las actividades de Formación Comunitaria y de Concreción Educativa, ambas dirigidas al planteamiento de actividades que permitan la transformación de la práctica educativa de maestras y maestros en función de la apropiación crítica de las propuestas de este material que ponemos a disposición.

Metodológicamente, en la Sesión Presencial (8 horas) trabajaremos organizados por Áreas de Saberes y Conocimientos, en tanto que en las Sesiones de Construcción Crítica y Concreción Educativa (138 horas) se trabajará en Comunidades de Producción y Transformación Educativa (CPTes); y en el Momento III (Sesión Presencial de Socialización) de 4 horas, la actividad puede organizarse por Áreas de Saberes y Conocimientos o por las CPTes, según las necesidades para un adecuado desarrollo de la sesión.



Debemos tomar en cuenta que en los casos que una o un facilitador deba trabajar, además, con la Unidad de Formación de Primaria Comunitaria Vocacional, es importante realizar una organización y proceso adecuado de manera que ambos niveles desarrollen adecuadamente esta Unidad de Formación.

Objetivo holístico

Ampliamos nuestros saberes y conocimientos del área problematizando y reflexionando la realidad, mediante el desarrollo de procesos metodológicos de articulación e integración de contenidos a través de la práctica de actitudes de trabajo cooperativo y respeto mutuo para desarrollar procesos educativos pertinentes vinculados a las demandas, necesidades y problemáticas de la realidad.

Criterios de evaluación

SABER

Ampliamos nuestros saberes y conocimientos del área problematizando y reflexionando la realidad.

- Comprensión de la importancia de la integración de saberes y conocimientos y de articulación del currículo con el Proyecto Socioproductivo.
- Apropiación crítica de los contenidos profundizados en cada área de saberes y conocimientos.

HACER

Mediante el desarrollo de procesos metodológicos de articulación e integración de contenidos.

- Articulación de los elementos curriculares con el plan de acción del Proyecto Socioproductivo
- Integración de los saberes y conocimientos de las Áreas al interior del Campo y entre Campo de Saberes y Conocimientos con el Proyecto Socioproductivo.

SER

A través de la práctica de actitudes de trabajo cooperativo y respeto mutuo.

- Actitud comprometida en el trabajo al interior de las CPTes.
- Respeto por la opinión de la o el otro

DECIDIR

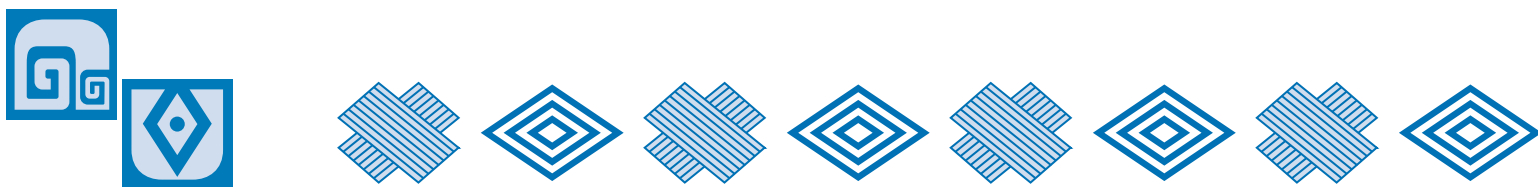
Para desarrollar procesos educativos pertinentes vinculados a las demandas, necesidades y problemáticas de la realidad.

- Transformación de la práctica educativa en función de responder a la realidad de la comunidad.

Uso de lenguas indígena originarias

El uso de la lengua originaria debe realizarse en los tres momentos del desarrollo de la Unidad de Formación. De acuerdo al contexto lingüístico, se realizarán conversaciones, preguntas, intercambios de opiniones, discusiones y otras acciones lingüísticas aplicando la lengua originaria.

Asimismo, esta experiencia desarrollada en los procesos de formación debe ser también desplegada por las y los maestros en el trabajo cotidiano en los espacios educativos en los que se desenvuelven.



Momento 1

Sesión Presencial (8 horas)

Para iniciar la sesión presencial, la o el facilitador anuncia que en la sesión presencial de 8 hrs. se hará énfasis en el trabajo del proceso metodológico de la articulación de las Áreas de Saberes y Conocimientos, lo que involucra la participación activa de todas las áreas en el desarrollo de actividades comunes, por Campos y por Áreas.

Proceso metodológico de la articulación de las áreas

1. Partir de la problematización de la realidad desde el sentido de los Campos y el enfoque de las Áreas

Uno de los criterios centrales del Modelo Educativo Sociocomunitario Productivo es vincular a la educación con la realidad; es decir, vincular la educación a los procesos histórico políticos de nuestras comunidades, pueblos, barrios, ciudades y el país en su conjunto; de esta manera, se busca partir de nuestros problemas/necesidades/potencialidades para que el desarrollo de los procesos educativos pueda convertirse en un mecanismo que coadyuve a transformar nuestra realidad.

En este sentido, el elemento central para la articulación de las Áreas de Saberes y Conocimientos son justamente nuestros problemas/necesidades/potencialidades, ya que esta realidad atraviesa a todas las Áreas sin distinción. Dentro del Currículo Base, el que cumple el rol articulador de las Áreas en el desarrollo de los procesos educativos es el Proyecto Socioproductivo, ya que representa aquel problema/necesidad/potencialidad de nuestro contexto que vamos a priorizar para transformar. Por tanto, las y los maestros desarrollarán los procesos de articulación en sus Unidades Educativas a través del mismo.

La problematización nos vincula con la realidad de un modo crítico, pues es una forma de cuestionar a la misma desde un determinado lugar y proyecto de sociedad; en nuestro caso, desde los sentidos de los Campos de Saberes y Conocimientos que expresan la direccionalidad política que plantea la estructura curricular. La problematización plantea preguntas y problemas irresueltos e inéditos que nos involucran en su desarrollo y resolución, es decir, permite abrir espacios para la transformación de la realidad; por tanto, no está dirigida sólo a explicar y/o describir fenómenos u objetos ajenos a nosotros.

Bajo este contexto, la problematización de un “acontecimiento” de la realidad para trabajar la articulación de las Áreas de Saberes y Conocimientos se refiere a plantear preguntas sobre un determinado hecho para cuestionarlo críticamente desde los criterios que plantean los Sentidos de los Campos y/o el Enfoque de las Áreas y de esta forma vislumbrar las formas en las que podemos vincular las problemáticas de la realidad con los procesos educativos.

Es importante aclarar que por temas didácticos el proceso metodológico de la articulación de las Áreas, que desarrollaremos en la sesión presencial, se realizará a partir de la narración de un “acontecimiento” o problema de la realidad, el cual será el punto de partida para realizar el proceso metodológico de la articulación de las Áreas.

No hay que confundir, entonces, a la narración del “acontecimiento” o problema de la realidad con la que iniciamos este ejercicio de articulación de las Áreas, como un “nuevo” elemento dentro de la estructura curricular. Como se ha aclarado, simplemente es un recurso que usamos con fines didácticos en el proceso de formación en el PROFOCOM.



Actividad 1

Organizados en grupos por Campos de Saberes y Conocimientos realizamos la lectura crítica y minuciosa de la narración del “acontecimiento”¹ o problema de la realidad propuesto en la Unidad de Formación.

“Acontecimiento”

Comunicación y gobiernos populares en América Latina

Cuadernos del Pensamiento Crítico Latinoamericano

Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales

Conselho Latino-americano de Ciências Sociais

Latin American Council of Social Sciences

Número 10 marzo de 2014, Segunda época



Florencia Saintout* y Andrea Varela** Imagen: Télam

En las últimas décadas surgen en América Latina gobiernos que responden a los intereses populares, y que debido a esta condición algunos han ubicado como gobiernos populistas (Laclau, 2005) o como parte de la llamada Nueva Izquierda. Gobiernos que más allá de todas sus diferencias tienen en común una o varias de las siguientes características: a) una crítica al neoliberalismo; b) preocupación por la redefinición del sentido de lo universal; c) planteo de la necesidad de una redistribución más equitativa de los capitales simbólicos y materiales; d) políticas de memoria, verdad, justicia; y e) apuesta a la unidad regional.

Todos estos gobiernos han encontrado en los monopolios de medios de comunicación a sus principales opositores, que han enfrentado cada una de sus medidas y han agredido especialmente las figuras de los presidentes.

Para entender que los conflictos entre medios y gobiernos populares no son conflictos aislados entre presidentes y periodistas, como lo presentan ciertas interesadas construcciones del sentido común, es necesario plantear la pregunta en torno al estatuto de estos medios.

¿Que son los medios? ¿Son sólo instrumentos, mediadores de la información? ¿Pueden ser pensados como simples medios/canales de comunicación? Por supuesto que no.

¹ Este primer paso para la articulación de las áreas en la Unidades Educativas se desarrollará a partir de una lectura crítica del problema, necesidad o potencialidad de nuestra comunidad definido para el Proyecto Socioproductivo.



En primer lugar, hay que señalar que los llamados medios dominantes son actores económicos, específicamente empresariales, ocupados en lograr la reproducción de sus capitales. Pero sin embargo, o incluso logrado esto, sus objetivos no se restringen a la generación de ganancias, sino que también están interesados en la producción de ideología.

En segundo lugar, los medios configuran un sistema de poder dominante, continental y global. Las investigaciones desde las ciencias sociales, particularmente desde la economía política de medios, han dado cuenta de este entramado concentrado a lo largo de más de tres décadas (Becerra; Mastrini, 2009; Moraes, 2011).

Estos “pulpos” mediáticos han actuado y actúan haciendo alianzas entre sí y con otros grupos económico/ideológicos, nacionales y foráneos. A esta altura sería no sólo ingenuo sino equivocado soslayar sus plataformas comunes sostenidas en ejes programáticos compartidos. En este sentido, las reuniones periódicas y públicas de la Sociedad Interamericana de Prensa, la SIP, que nuclea a los dueños de los medios impresos del continente (y que en la casi absoluta mayoría de los casos son dueños también de otro tipo de medios) tienen siempre como corolario alguna conclusión adversa a la intervención de los Estados con gobiernos populares.

Debe recordarse siempre que la SIP, que se autoproclama la voz autorizada en problemáticas de libertad de expresión, es un cartel de propietarios de medios que nació en el marco de la Guerra fría asociada a la CIA para protagonizar la defensa de los poderes imperiales.

Han sido largamente documentadas sus acciones en toda la región de desestabilización y golpismo en las dictaduras, en las cuales muchos periodistas fueron perseguidos y asesinados. Por último, en algunos casos estas empresas mediáticas tienen una historia de complicidad e incluso responsabilidad directa con crímenes de Lesa Humanidad cometidos durante las últimas dictaduras en el Cono Sur. Tal es el caso del grupo Clarín o La Nueva Provincia en Argentina, que han sido acusados legalmente por delitos concretos.

Respuestas. Ante los continuos ataques que desde las plataformas mediáticas se llevan adelante contra los gobiernos populares, éstos responden por varios caminos. Algunos de ellos son:

- a) La creación de nuevos marcos regulatorios, desde perspectivas que asumen la comunicación como un derecho humano y no como simple mercancía cuyo valor lo asigna el mercado.
- b) La denuncia de los poderes e intereses que ocultan estos medios cuando construyen la información. Por lo tanto, la deslegitimación de los monopolios comunicacionales.
- c) La apuesta a políticas comunicacionales estatales que permiten la construcción, circulación y acceso a la comunicación desde posiciones que durante décadas habían sido negadas por la hegemonía neoliberal (Telesur es un importante ejemplo de una política interestatal para construir una agenda contrainformativa a la dominante, así como también el significativo fomento a las producciones audiovisuales nacionales en Argentina, entre muchas otras medidas).
- d) Por último, la incorporación de formas hasta el momento novedosas de comunicación entre los presidentes y sus pueblos (el “Aló presidente”, de Hugo Chávez, así como la decisión de Cristina Fernández de Kirchner de comunicarse sin la intermediación de las conferencias de prensa, poniéndolas en cuestión).

Cada uno de estos caminos se transita desde una concepción de la comunicación donde el reconocimiento de las diferencias va ligado a la necesidad de la igualdad que significa redistribución.



Y es necesario decir que estos gobiernos populares asumen una muy larga historia de luchas que durante décadas se había dado de maneras fragmentadas a través de actores dispersos, y que ellos logran articular. De allí parte importante de su potencia en las sociedades contemporáneas.

Desafíos. En la actualidad podemos pensar que la relación entre gobiernos populares y monopolios mediáticos es una relación de altísimo conflicto, nada lineal, pero donde a contramano de lo que venía sucediendo se ha desnaturalizado el estatuto por años único de la comunicación como mercancía.

Pero los desafíos para lograr una comunicación profundamente democrática en la región son varios. La creación de marcos legales y políticos continentales es uno de ellos. En este sentido, no debería dejarse de lado la apuesta a una regulación de las nuevas condiciones de las tecnologías y sus convergencias. Si asumimos que la técnica es siempre social e histórica antes que técnica, el sentido que ella adquiera para la vida puede ser asumido como aquel que viene dado por el mercado capitalista transnacional o aquel que decidamos los pueblos. Del mismo modo, pensar la llamada inclusión digital puede ser bajo la vía de una inclusión acrítica a una comunicación dada o la posibilidad de invención incluso de lo que se entiende por redistribución tecnológica.

También un desafío crucial para la transformación de los mapas comunicacionales es la creación no sólo de nuevos medios sino también de nuevos públicos. El aporte de las teorías de la recepción ha sido la constatación de que los públicos no nacen sino que se hacen. Y si durante las décadas pasadas las ciencias sociales habían trabajado intensamente en la creación de públicos que pudieran “leer” en lectores críticos de unos medios que se asumía inmodificables (Saintout, Ferrante, 1999), hoy aparece el horizonte de la creación de unos públicos que puedan “hablar” y no sólo consumir.

En este camino, por supuesto que la creación de nuevos contenidos es condición innegociable para lograr una comunicación plural e igualitaria a la vez. Contenidos que impugnen a los que aún predominan y que son contenidos clasistas, machistas y autocráticos.

Pero además de la necesidad de una información no discriminatoria que deben garantizar los Estados, los procesos democráticos contemporáneos han abierto la puerta a pensar otras estéticas y otras lenguas: en fin, han abierto a pensar la comunicación como un asunto de lo(s) otro(s), donde la lengua del otro negado tenga lugar.

Estados populares que se constituyen como tales habilitando la(s) cultura(s) popular(es). Contra la violencia simbólica de su clausura, una restitución de lo popular que no sea una recuperación folklórica, ni elitista, ni travestida de masividad comercial, ni producto de una izquierda ilustrada que siempre le tiene que hablar de afuera, sino una lengua popular hecha de todas sus luchas y espesor histórico.

Los gobiernos populares no serán sólo garantes de la desmonopolización sino de que la lengua popular dispute contra aquella que la niega, que la ha negado.

Actividad 2

Problematización del “acontecimiento” o problema de la realidad desde el Sentido de los Campos de Saberes y Conocimientos.

Reunidos en grupos de Campos de Saberes y Conocimientos, dialogamos y reflexionamos sobre cómo desde nuestro Campo de Saberes y Conocimientos podemos abordar las problemáticas de la realidad que hemos encontrado en la narración del “acontecimiento”.



Para realizar esta actividad podemos guiarnos por las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo se vincula el acontecimiento leído con el sentido del Campo de Saberes y Conocimientos: Ciencia Tecnología y Producción?

2. ¿Por qué los medios de comunicación no informan sobre los procesos de producción con base en las vocaciones y potencialidades productivas de las regiones?

3. ¿Por qué en el marketing publicitario los medios de comunicación sólo se limitan a mostrar los productos acabados y no los procesos productivos de los mismos?



4. ¿Por qué el manejo de la información y la comunicación se ha convertido en fuente de generación y acumulación de riqueza para el sector privilegiado?

5. Los medios de comunicación orales, escritos y visuales, ¿informan fomentando la acumulación de riqueza del poder económico, mediático y político? De ser cierto, ¿por qué?

6. ¿Cómo desarrollamos capacidades y cualidades creativas para generar alternativas de comunicación para la difusión de las tecnologías de las NPIOCs?



7. ¿Cómo podemos aplicar la tecnología del Satélite Túpac Katari en los procesos educativos desarrollados en nuestras Unidades Educativas para desarrollar capacidades productivas?

Después del análisis y reflexión realizados, anotamos las ideas o conceptos relevantes para ser comparados

Actividad 3

Problematización del “acontecimiento” o problema de la realidad tomando en cuenta la naturaleza, las características y el enfoque del Área Técnica Tecnológica.

Dando continuidad a la reflexión realizada en la anterior actividad y reunidos por Áreas de Saberes y Conocimientos, dialogamos y reflexionamos sobre cómo desde nuestra Área de Saberes y Conocimientos podemos abordar las problemáticas de la realidad que hemos encontrado en la narración del “acontecimiento”.

Respondemos a las siguientes preguntas problematizadoras, tomando en cuenta la naturaleza y las características del área.

1. ¿Cómo hacemos para que los medios de comunicación amplíen espacios de información de los procesos educativos en matemática y sus aplicaciones en la vida cotidiana?



2. ¿De qué manera se relaciona el área de matemática con la distribución de espacios y tiempos en los medios de comunicación?

3. ¿Qué tipo de información matemática encontramos en la diversidad de los medios de comunicación?

4. ¿Qué importancia tiene la información matemática y tecnológica en la distribución del espacio por página utilizada por los medios escritos en las imágenes y columnas de los periódicos?

5. ¿De qué manera se puede medir el impacto que los medios de comunicación difunden sobre el marketing de los productos tecnológicos?



Después del análisis y reflexión realizados anotamos los elementos más relevantes para ser compartidos en plenaria.

Actividad 4

A continuación presentamos un ejemplo de articulación de contenidos del área, en función del acontecimiento, para el quinto y sexto año de escolaridad.

Organización de contenidos del Programa de Estudios para el 5to. y 6to. Año de Escolaridad de Educación Secundaria Comunitaria Productiva		
CAMPO DE CIENCIA TECNOLÓGIA Y PRODUCCIÓN		
ÁREA DE CAMPO	Área de saberes y conocimientos MATEMÁTICA	Área de saberes y conocimientos TÉCNICA TECNOLÓGICA
Contenidos de los planes y programas	MODELIZACIÓN TRIGONOMÉTRICA EN LA CIENCIA (5to. año) Trigonometría y su aplicación en la ciencia, tecnología satelital y telecomunicaciones. Radio, televisión, microondas (sistemas de telecomunicación). La acústica, las ondas, su representación gráfica y aplicación. CÁLCULO Y TECNOLOGÍA (6to. año) Funciones matemáticas y modelos matemáticos. Representación gráfica y aplicación tecnológica de las funciones matemáticas.	Evolución de los motores, máquinas, equipos y herramientas de acuerdo al área productiva.
Contenidos para la formación de maestras y maestros derivados de los contenidos de los programas de estudio.	Sistemas de comunicación y matemática digital. Lenguaje común y lenguaje matemático en la ciencia y tecnología. Límites, derivadas e integrales para la aplicación tecnológica. Representación gráfica para la interpretación y descripción de situaciones sociales y naturales.	Máquinas, equipos, herramientas (simples y semicomplejas)

Luego del análisis y reflexión de la articulación de contenidos, pasamos a la siguiente actividad:

Realizamos un ejercicio similar al ejemplo anterior, tomando en cuenta los Programas de Estudio del Currículo Base y Regionalizado, registrando en el siguiente cuadro la articulación de contenidos del Área para otro año de escolaridad en función del acontecimiento presentado.

Organización de contenidos del Programa de Estudios para el Año de Escolaridad de Educación Secundaria Comunitaria Productiva		
CAMPO DE CIENCIA TECNOLÓGIA Y PRODUCCIÓN		
ÁREA DE CAMPO	Área de saberes y conocimientos MATEMÁTICA	Área de saberes y conocimientos TÉCNICA TECNOLÓGICA
Contenidos de planes y programas.		
Contenidos para la formación de maestras y maestros derivados de los contenidos de los programas de estudio.		



Analizamos y reflexionamos sobre el ejercicio de articulación realizado.

Actividad 2

Reflexionamos sobre la siguiente lectura de trabajo para el conocimiento y comprensión de la geometría desde nuestra vivencia cultural.

Momento 2

Sesiones de construcción crítica y concreción educativa (138 horas)

En este momento de formación es importante trabajar en las Comunidades de Producción y Transformación Educativa - CPTes. A él corresponden las actividades de Formación Comunitaria, de Autoformación y las de Concreción educativa.

I. Actividades de Autoformación

En la autoformación cada maestra o maestro desarrolla procesos de reflexión sobre su formación, por lo que debe realizar acciones que vayan en favor de ese cometido. Para ello, se proponen las siguientes actividades:

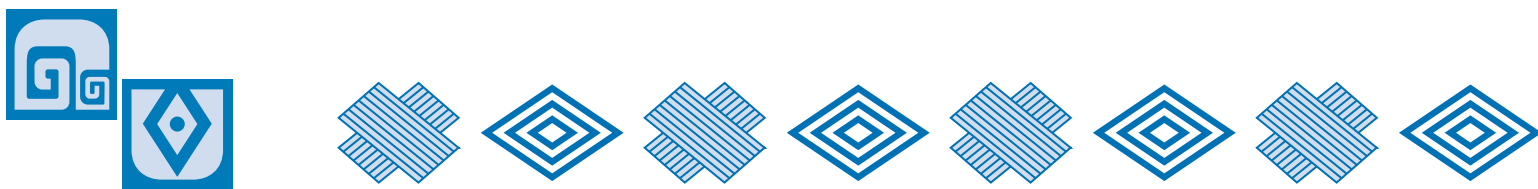
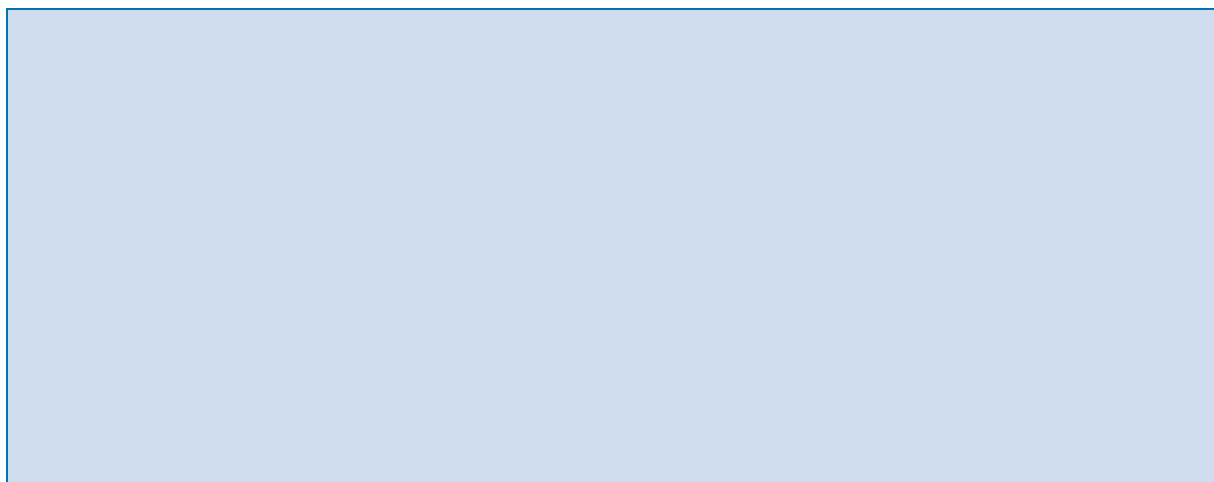
1. Preguntas problematizadoras por tema.
2. Lecturas de trabajo de nuestra Área de Saberes y Conocimientos.
3. Actividades de análisis y reflexión de la problematización de las lecturas de trabajo y otros.

En las unidades educativas donde haya la posibilidad de hacer un trabajo entre varios docentes de la misma área, estas actividades deberán ser desarrolladas de forma colectiva.

Tema 1: El lenguaje de la matemática en los medios de comunicación

Preguntas problematizadoras

1. ¿Qué importancia tiene la matemática en los medios de comunicación que cumplen las actividades de informar, orientar y distraer a la población?



2. ¿Qué contenidos matemáticos subyacen y aparecen en las informaciones de los medios de comunicación?

3. ¿Desde nuestra Práctica Educativa, cómo integramos la Estadística, Aritmética, Geometría, Álgebra y el Cálculo en las informaciones de los sistemas de comunicación?

4. ¿Cómo comprendemos el lenguaje matemático en el pensamiento matemático en la formación integral y holística?



Después del análisis y reflexión realizados, anotamos los elementos más relevantes para ser compartidos en plenaria.

Actividad 1 (1ra. plenaria)

Para conocer la manera en que cada Campo de Saberes y Conocimientos interpreta la problemática planteada en el “acontecimiento” y para tener una visión global de cómo se está asumiendo la misma desde las Áreas de Saberes y Conocimientos, desarrollamos una plenaria donde se exponga los resultados de la reflexión desde:

- a) Las conclusiones y/o aportes de cada Campo.
- b) Las conclusiones y/o aportes de cada Área de saberes y conocimientos que estén presentes.

Para realizar esta actividad se deberá delegar a responsables por Campos y Áreas y se procurará ser sintéticos en la exposición que realicen.

La plenaria puede realizar ajustes y al mismo tiempo profundizar en la reflexión en los Campos y Áreas que lo requieran.

2. Articulación de contenidos de los Programas de Estudio en función del acontecimiento y/o problemática de la realidad

La reflexión y problematización generada en los anteriores puntos debe permitirnos delinear criterios comunes para todas las Áreas y darle sentido y orientación crítica a nuestra planificación curricular y práctica educativa². Esta problematización debe ayudarnos a una selección y articulación de contenidos (desde cada Campo y Área) acorde con la problemática y/o realidad de nuestro contexto educativo.

La definición del sentido de nuestra planificación curricular nos permitirá articular de manera más pertinente la selección de nuestros contenidos (para no caer en respuestas mecánicas, a la hora de definirlos).

Lecturas de trabajo para el tema 1

“Matemáticas y medios de comunicación”

Elisa Benítez Jiménez

Profesora Colegio Rafaela Ybarra. Madrid.

¿Qué son los Medios de Comunicación?

Todos conocemos acerca de la importancia que tienen los Medios de Comunicación en la sociedad actual. Diariamente estamos en contacto con ellos, pero definirlos no es tarea fácil por la cantidad de significados y conceptos que éstos implican. Algunos los definen como la manera más eficaz y rápida de transmitir un mensaje, en cambio para otros son un vehículo de manipulación social mediante el cual los diferentes poderes de la sociedad se hacen escuchar. La mayoría piensa que los **Medios de Comunicación** son instrumentos mediante los cuales se **informa** y se **comunica** de forma masiva; son la manera

² Que sería el momento de reflexión política, ya que en éste se plantea la manera cómo encaramos las problemáticas de la realidad desde los sentidos que orientan a los Campos de Saberes y Conocimientos y el enfoque de las Áreas. Aquí no se trata solamente de un uso meramente temático de un problema para transversalizarlo en las Áreas, sino se trata de plantear la transformación de los problemas de la realidad desde una orientación política de construcción de la realidad.



como las personas de una sociedad se enteran de lo que sucede a su alrededor a nivel económico, político, social, etc. Los principales Medios de Comunicación en la actualidad son: **prensa, revistas, libros, teléfono, radio, televisión e Internet**. También se podrían considerar soportes aparte de los tradicionales, videos, discos compactos, DVDs, películas, fotografías, obras de teatro, etc.

La llegada de **Internet** ha tenido un gran impacto en los medios tradicionales, favoreciendo procesos sociales de comunicación interactiva e intercambio de información. Actualmente tenemos la disponibilidad de acceder a distintos Medios de Comunicación por Internet, es decir, en un solo tenemos otros tales como la prensa, radio, televisión y telefonía. Esta característica hace de Internet un **multi-medio** para llegar a las masas y la difusión global de diferentes temáticas.

Papel que juega las Matemáticas en los Medios de Comunicación

Las Matemáticas están en todas partes, desde que nos levantamos y suena el despertador, miramos la hora 7:30, desayunamos leche 200 ml, 2 magdalenas, salimos de casa a las 8:00, cogemos el ascensor y le damos al piso 0, andamos hasta el cole 200 metros, etc... nos acompañan los números, no podemos imaginar un mundo sin ellos. Así podemos decir que las Matemáticas están en todos los aspectos de nuestra vida cotidiana, esto no nos sorprende, aunque quizás no somos conscientes de la matemática subyacente en cada pequeño detalle diario. Los medios de comunicación no son una excepción. Los periódicos, las noticias, publicidad, programas de televisión, radio, etc... están llenos de referencias matemáticas, ya sea en forma de estadísticas, porcentajes, números, diagramas, datos, etc... La comunidad matemática y en concreto los educadores de este campo somos conscientes del gran papel que juegan las matemáticas en los Medios de Comunicación, por lo cual desde hace muchos años se han ido realizando actividades para aplicar en el aula, utilizando informaciones extraídas de noticias de periódicos, analizándolas y proponiendo actividades con preguntas para sacarle el mayor jugo a una noticia donde había Matemáticas.

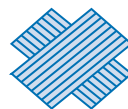
Contenidos matemáticos en los Medios de Comunicación

Los contenidos matemáticos que más aparecen en los Medios de Comunicación son los relacionados con los números en general, muchas noticias vienen expresadas en porcentajes. Quizás una parte de las Matemáticas que más se usa en los Medios de Comunicación sea la Estadística, cuántas veces en una noticia nos hemos encontrado con la frase “según las estadísticas”, continuando con una cantidad de números y/o porcentajes, seguidos de tablas y gráficos estadísticos, para que el lector entienda más rápido lo que lee, tal cual indica el refrán “Una imagen vale más que mil palabras”. Las estadísticas que aparecen en la televisión a lo largo de un partido de fútbol, baloncesto, estadísticas de muertos en carretera durante el fin de semana, son cosa habitual y tienen en común que son un conjunto de datos numéricos sobre una cuestión presentada en tablas o gráficos.

También podemos encontrarnos con geometría en muchos de los logotipos que se usan en publicidad y en anuncios televisivos.

Internet, Matemáticas y Medios de Comunicación

Actualmente, el uso de Internet en la vida cotidiana se ha convertido en una herramienta casi imprescindible y tan necesaria como puede ser el vehículo, la lavadora o el teléfono. Hace 50 años no habríamos imaginado jamás lo que hoy estamos viviendo en cuanto a comunicaciones. **Internet** es, sin lugar a dudas, el **Medio de Comunicación** que más ha crecido y se ha introducido en la mayoría de los ámbitos de nuestra sociedad, ¿quién no usa este recurso en la actualidad? En Internet podemos encontrar de todo y una gran información relacionada con noticias sobre Matemáticas en los Medios de Comunicación; por



ejemplo, podemos nombrar la página de **Divulgamat**, en la que se recogen noticias relacionadas con las Matemáticas publicadas por: El País, El Mundo, ABC, etc... Libros de divulgación matemática, textos online, revistas matemáticas, videos didácticos, cine, TV y teatro o la página de **Planeta Matemático** en la sección de prensa donde se muestra un listado de artículos relacionados con las matemáticas, cine y TV. En la página **Educa madrid** podemos encontrar artículos con preguntas sobre un texto y las respuestas. En la página **Aula**: suplemento de EL MUNDO, podemos encontrar láminas con contenidos matemáticos desde 1999, que podemos utilizar en nuestras clases.

Como hemos comentado antes, en Internet está casi todo, ya no es necesario comprar la prensa en el quiosco, podemos consultarla en Internet. Muchas de las actividades con contenidos Matemáticos que vamos a proponer van a tener como base la utilización de Internet y el ordenador. Estaremos así motivando a nuestros alumnos hacia el uso de las Nuevas Tecnologías o TIC usando este recurso tan potente que nos ofrece la sociedad actual. Tampoco debemos olvidar los contenidos transversales (educación para la salud, educación vial, educación para el consumidor, educación ambiental, etc...) que tienen las noticias, ya sean en la prensa, radio o televisión, así podemos usar los medios de comunicación para educar en valores.

Objetivos: Matemáticas y Medios de Comunicación. Propuesta general de actividades

Con las actividades que se van a proponer se trata de conseguir los siguientes objetivos:

- Interpretar y entender correctamente mensajes expresados en lenguaje matemático que aparecen en los Medios de Comunicación.
- Manejar con soltura y rapidez información utilizada en los Medios de Comunicación manteniendo una actitud crítica y educar en valores.
- Fomentar el uso de las Nuevas Tecnologías (TIC): Internet, ordenador, aplicaciones informáticas, correo electrónico, cámara video y fotográfica, PenDiver, CDS y DVD, etc...

Como propuesta general de actividades con contenidos matemáticos usando los Medios de Comunicación, podemos tener en cuenta los comentarios siguientes:

- **Publicidad:** buscar y analizar contenidos matemáticos en anuncios televisivos, periódicos, emisoras de radio, como por ejemplo precios de componentes informáticos, cámaras de video, cámaras fotográficas, viviendas, coches, viajes. Formas geométricas de logotipos. Préstamos hipotecarios.
- **Deportes:** analizar tablas y gráficos estadísticos.
- **Noticias:** donde se haga referencia a las Matemáticas o se utilice. Por ejemplo: información del tiempo: cartogramas. Datos en los que se usa porcentajes estadísticos.
- Pasatiempos en la prensa: sudoku, sopa de letras, autodefinidos, etc...
- **Radio:** grabar anuncios y programa analizando los contenidos matemáticos.
- **Televisión:** analizar programas con contenidos matemáticos.
- **Libros:** búsqueda de aquellos con contenidos matemáticos. Proponer leer uno y elaborar preguntas.
- **Cine:** ver una película y comentar el papel de las Matemáticas en dicha película.
- **Internet:** visita de periódicos y búsqueda de artículos con contenidos matemáticos.



Actividades elaboradas

Dado que la prensa es el Medio de Comunicación impreso, de aparición diaria o semanal, con información sobre todas las áreas temáticas de interés general, a continuación se exponen algunas actividades que se propusieron en la ponencia basadas en la utilización de este medio.

En la primera actividad, a partir de un recorte de publicidad se hacen preguntas relacionadas con él; en cambio, en la segunda actividad no se hacen preguntas directamente del texto sino que a partir de él los alumnos tienen que buscar, investigar y elaborar lo que se les pide. Como se puede comprobar, son dos actividades muy diferentes, pero en ambas hay Matemáticas, se usan TIC y la educación en valores.

Actividad 1: Matemáticas y publicidad. Educación para el consumidor

Objetivo: Fomentar la investigación y concienciar del uso de las Matemáticas en la vida cotidiana.

Actividad 2: Matemáticas y cocina. Educación para la Salud. Educación para el consumidor

Objetivo: Concienciar acerca de la importancia de una alimentación saludable utilizando recetas de cocina con ingredientes expresados mediante cantidades numéricas y artículos de prensa. Fomentar la creatividad y el trabajo en grupo.

Propuesta educativa

Dada la gran importancia que tiene la educación en valores en la sociedad en la que vivimos, propongo utilizar los días internacionales en educación en valores para fomentar el uso de las Matemáticas, recurriendo a la prensa e Internet. Por supuesto, no debemos olvidarnos del Día Escolar de las Matemáticas y como mínimo realizar dicho día actividades lúdicas diferentes a las habituales, juegos, talleres, actividades propuestas en el cuadernillo de cada año, según el tema que trate. Hay un proverbio chino que dice: “Lo que oyes lo olvidas, lo que ves lo recuerdas, lo que haces lo aprendes”. Y como decía el periodista Martín Gardner: “El mejor método para mantener despierto a un estudiante es seguramente proponerle algún juego matemático intrigante, un pasatiempo, un truco matemático, una paradoja, un modelo, un trabalenguas o cualquiera de esas mil cosas que los profesores aburridos suelen rehuir porque piensan que son frivolidades”.

No seamos profesores aburridos y propongamos a nuestros alumnos actividades diferentes.

Conclusiones finales

Podemos decir que el uso de los Medios de Comunicación en el aula de Matemáticas tiene sus ventajas y sus inconvenientes. Como ventajas, todos sabemos que hacer actividades diferentes motiva a nuestros alumnos y atraen su atención, además favorecemos un aprendizaje cooperativo, usamos las TIC y las actividades que realizamos sacadas de una noticia de prensa podemos adaptarlas a diferentes niveles educativos, por supuesto educando en valores. Por otro lado, los inconvenientes que nos podemos encontrar son, entre otros, la pérdida de horas de clase que no debemos verlo como un problema, si tenemos grupos conflictivos quizás este tipo de actividades no las podamos realizar tan a menudo como nos gustaría, pero tenemos que intentarlo. Por otro lado, las noticias caducan y aunque nos las preparemos se desactualizan en seguida y siempre tenemos que estar preparando nuevas actividades; además, todo



depende de nuestra creatividad y ganas de hacer. Por supuesto, el abuso tampoco es bueno y al tener que contar con recursos tecnológicos, como puede ser la sala de informática, esto puede echarnos atrás porque el acceso a ella no sea siempre posible.

Pongámonos manos a la obra y hagamos cosas diferentes con nuestros alumnos para que se motiven, usen las TIC y se interesen por las Matemáticas.

Cómo aprendo Álgebra

Adolfo Chapuz Benítez

El lenguaje matemático

La característica más importante de las matemáticas es sin lugar a dudas su lenguaje. El lenguaje matemático es la forma en que debemos comunicarnos cuando estamos inmersos en el terreno de las matemáticas. Cada ciencia o área de conocimiento tiene su propia forma de decir las cosas. Los políticos, los filósofos, los poetas, los médicos, los economistas, los psicólogos, los comunicadores, los músicos tienen su propio lenguaje, y para poder entenderlos y comunicarnos con ellos debemos saber y dominar sus propios lenguajes.

Aprender matemáticas = Aprender su lenguaje

El lenguaje de las matemáticas es fundamental para toda la ciencia y tecnología actuales. El Internet, las computadoras, los teléfonos celulares, los automóviles, el aire acondicionado, las Ipads, los aviones, satélites... no existirían sin el lenguaje de las matemáticas.



El lenguaje matemático nos permite codificar los problemas científicos reales en ecuaciones o expresiones matemáticas (MODELOS MATEMÁTICOS), las cuales nos permiten escribir y describir la esencia y “dinámica” de un fenómeno en unos cuantos símbolos.

Actividad 1. Realizamos un ensayo sobre el rol o papel que cumple la matemática en los medios de comunicación.

Actividad 2. Elaboramos un plan de clase, tomando en cuenta una de las sugerencias para trabajar la relación de la matemática con la comunicación.



Tema 2: Funciones, representación gráfica y aplicación de la matemática

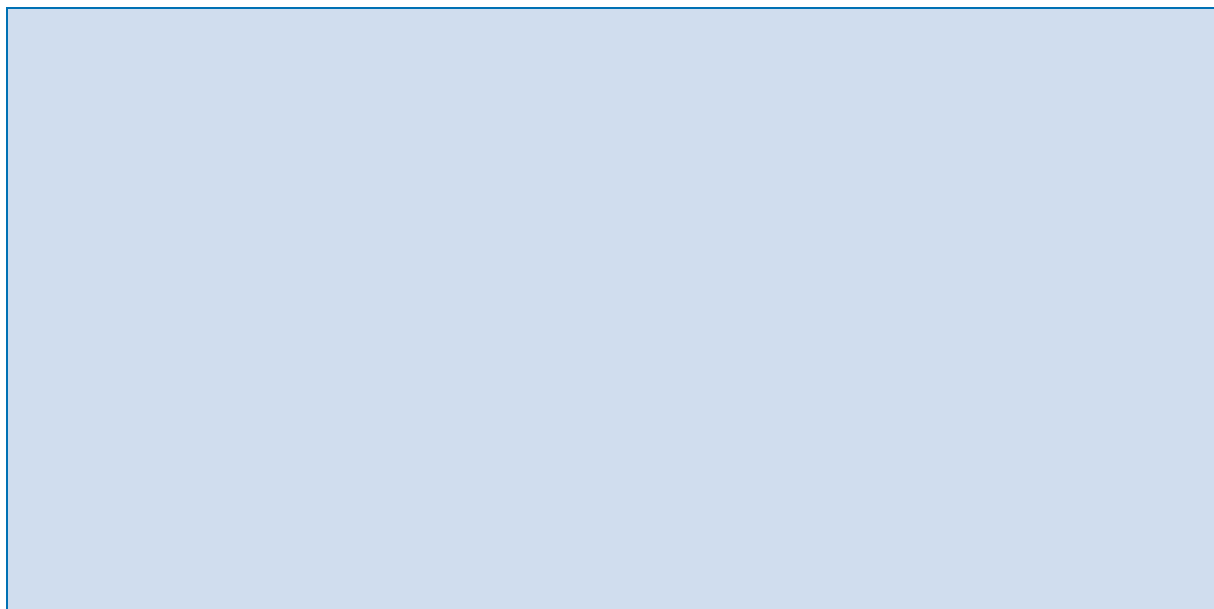
Preguntas problematizadoras

1. ¿Qué aspectos de nuestra realidad trabajamos a partir de las aplicaciones de las funciones algebraicas y las funciones matemáticas?

2. ¿Qué problemáticas de nuestra comunidad educativa son explicables mediante la modelización de funciones matemáticas para su interpretación, explicación y comprensión?



3. ¿De qué manera la modelización matemática permite resolver problemas de finanzas, economía, estadística, ingeniería, medicina, química y física, astronomía, geología y de cualquier área de las ciencias donde haya que relacionar variables?



Lecturas de trabajo para el tema 2

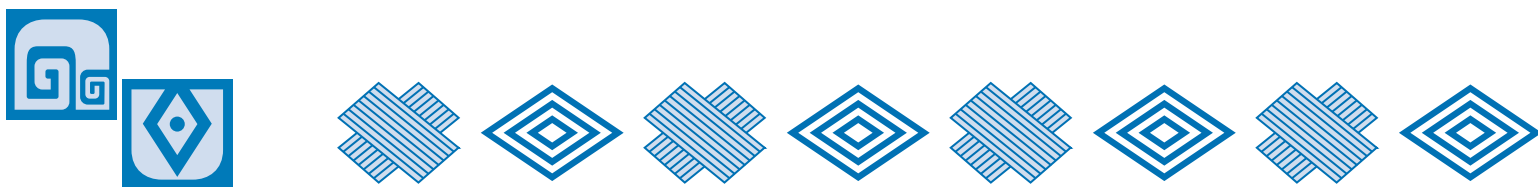
Concepto de función matemática y su evolución histórica-epistemológica

El concepto de **función matemática** o simplemente **función** es, sin duda, el más importante utilizado en Matemáticas y en las demás ramas de la ciencia. No fue fácil llegar a él y muchas mentes muy brillantes han dedicado enormes esfuerzos durante siglos para que tuviera una definición consistente y precisa.

Desde los tiempos de Galileo, que fue uno de los primeros en usarlo (aunque no en la forma que nosotros lo conocemos actualmente), pasando por el gran Newton y Leibniz, que fue el primero que en 1673 usó la palabra “función” para referirse a la relación de dependencia de dos variables o cantidades, Euler, que le dio su formulación moderna $y = f(x)$, Cauchy, Dirichlet o Gauss, las mejores mentes de la Historia de la Humanidad le dedicaron su atención y sus desvelos.

Inicialmente, una función se identificaba a efectos prácticos con una expresión analítica que permitía calcular sus valores. Sin embargo, esta definición tenía algunas limitaciones: expresiones distintas pueden arrojar los mismos valores, y no todas las «dependencias» entre dos cantidades pueden expresarse de esta manera. En 1837 Dirichlet propuso la definición moderna de función numérica como una correspondencia cualquiera entre dos conjuntos de números, que asocia a cada número en el primer conjunto un único número del segundo.

La intuición sobre el concepto de función también evolucionó. Inicialmente la dependencia entre dos cantidades se imaginaba como un proceso físico, de modo que su expresión algebraica capturaba la ley



física que correspondía a éste. La tendencia a una mayor abstracción se vio reforzada a medida que se encontraron ejemplos de funciones sin expresión analítica o representación geométrica sencillas, o sin relación con ningún fenómeno natural, y por los ejemplos «patológicos» como funciones continuas sin derivada en ningún punto.

Durante el siglo XIX, Julius Wilhelm Richard Dedekind, Karl Weierstrass, Georg Cantor, partiendo de un estudio profundo de los números reales, desarrollaron la *teoría de funciones*, siendo esta teoría independiente del sistema de numeración empleado. Con el desarrollo de la teoría de conjuntos, en los siglos XIX y XX surgió la definición actual de función, como una correspondencia entre dos conjuntos de objetos cualesquiera, no necesariamente numéricos. También se asoció con otros conceptos vinculados como el de relación binaria.

El estudio de las propiedades de las funciones está presente en todo tipo de fenómenos que acontecen a nuestro alrededor. Así, podemos nombrar fenómenos sociales relacionados con crecimientos demográficos, con aspectos económicos como la inflación o la evolución de los valores bursátiles, con todo tipo de fenómenos físicos, químicos o naturales, como la variación de la presión atmosférica, la velocidad y la aceleración, la gravitación universal, las leyes del movimiento, la función de onda de una partícula a escala cuántica, la desintegración de sustancias radiactivas o la reproducción de especies vegetales y animales. Casi todo es susceptible de ser tratado a través del planteamiento y estudio de una o varias funciones que gobiernan los mecanismos internos de los procesos en todas las escalas y niveles.

Otra cosa bien distinta y mucho más difícil es determinar cuáles son las funciones que intervienen en cada proceso en concreto. Esta, en suma, es la tarea de los científicos: descubrir la *dinámica rectora* de cada fenómeno y expresarla en términos de una función.

El concepto de función

El origen del concepto de función ha estado siempre unido al estudio de los fenómenos sujetos a cambios. Las referencias más antiguas al concepto de función se encuentran en algunos escritos de astrónomos babilonios. En la Edad Media el estudio de funciones aparece ligado al concepto de movimiento, siendo uno de los primeros en realizarlo Nicolás de Oresme (1323-1392), el cual representó en unos ejes coordinados gráficos relacionados con el cambio de la velocidad respecto al tiempo.

Tres siglos más tarde, Galileo, en 1630, estudió el movimiento desde un punto de vista cuantitativo, justificándolo experimentalmente y estableciendo, a partir de ello, leyes y relaciones entre magnitudes.

A partir de Galileo, el concepto de función fue evolucionando hasta que a comienzos del siglo XIX, en 1837, Dirichlet formuló la definición de **función** como **relación entre dos variables**, que es la que actualmente aceptamos y manejamos.

Vamos a comenzar el estudio de las funciones dando su definición contextual actualmente aceptada, relativamente moderna para la importancia del concepto.



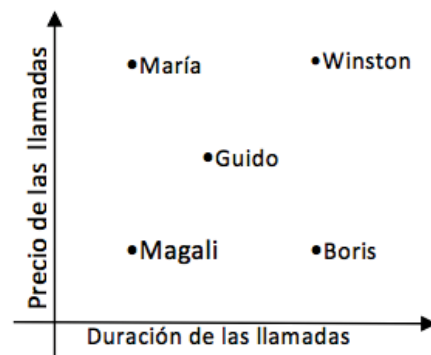
Didáctica de la Matemática ¿Cómo enseñar funciones?

Germán Careaga Cantuta

FUNCIONES:

Análisis de las representaciones gráficas

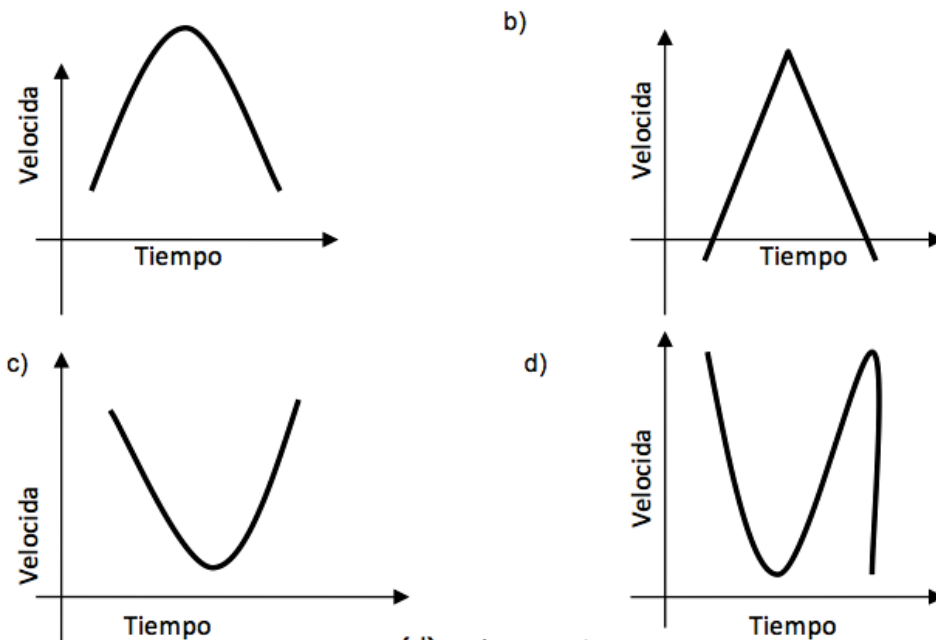
"Llamadas telefónicas"



En el gráfico se plantean los casos de 5 personas que realizan llamadas a diferentes ciudades del país y del exterior. El precio y la duración de la llamada de cada uno aparecen representados en la gráfica de puntos. Analiza y determina conclusiones imaginarias.

"La variación de la velocidad"

La trayectoria de la bola de golf, luego de ser golpeada, muestra una "variación de velocidad". Identifiquemos la gráfica que corresponde al cambio de velocidad de la bola en el aire luego de ser golpeada por el jugador de golf.



(d) es la correcta

Una gráfica es la representación de una relación entre dos variables



¿Qué es una función?

El responsable de la construcción de la piscina tiene una duda: ¿podríamos llenar dos piscinas cúbicas de iguales dimensiones con distinto volumen de agua?

La respuesta es que no, ya que si las dimensiones son las mismas el volumen que pueden contener es el mismo.

La relación entre la longitud del lado de la piscina y su volumen es una **función** porque a cada valor del lado le **corresponde un único valor** del volumen.



A las magnitudes que intervienen en la relación se las llama **variables**. Una de ellas será la **variable independiente** y la otra será la **variable dependiente**.

Una función es una relación entre dos magnitudes de manera que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda, llamado imagen.

A las magnitudes que intervienen en una función se las llama variables:

- **Variable independiente.** Es la que se fija primero. Se le suele asignar la letra x .

Así, por ejemplo:

“Crecimiento de una planta”

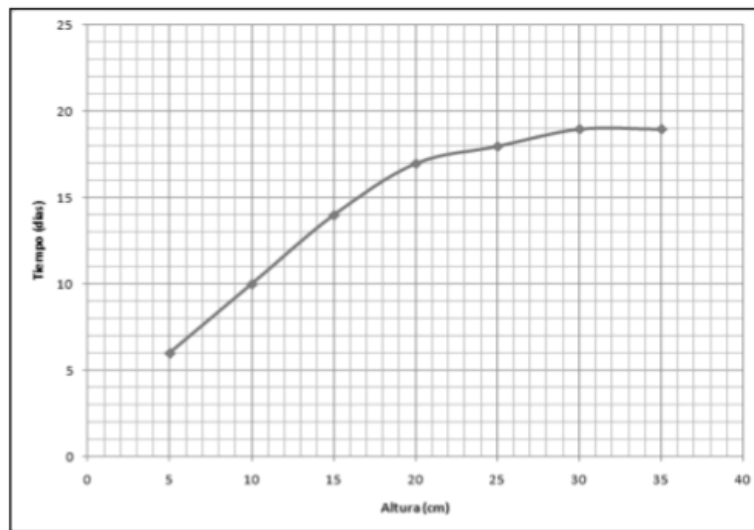
Los seres vivos crecen de manera progresiva en el tiempo; las plantas, por ejemplo, requieren para su crecimiento no sólo del tiempo sino de otros factores propios de la naturaleza, tales como el aire, la luz, el agua, etc.

Este ciclo de crecimiento es representado matemáticamente mediante gráficas y funciones algebraicas.

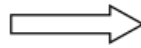
La siguiente tabla nos informa sobre el crecimiento de una planta a medida que transcurre el tiempo.

Tiempo (Días)	5	10	15	20	25	30	35
Altura (cm)	6	10	14	17	18	19	19





Ciclo de crecimiento



$$h = f(t)$$

La altura está en

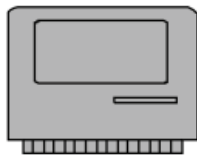
Por tanto:

$$f = [(5,6), (10,10), (15,14), (20,17), (25,18), (30,19), (35,19)]$$

Observa que los primeros elementos no se repiten.

“Una función es un conjunto de pares ordenados (x, y) tales que no hay dos pares ordenados diferentes que tengan el mismo primer componente”.

Una función también puede compararse con una computadora. Un número “ x ” es la entrada a la máquina y el valor funcional “ $f(x)$ ” correspondiente es el resultado obtenido (o salida), después que la máquina ha operado sobre “ x ”.



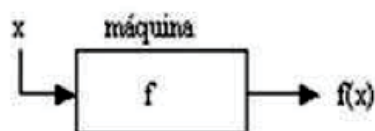
Entrada



Ciclo de crecimiento

O bien, podemos comparar una función $f(x)$ con una máquina a la cual se le introduce un valor x y después de una serie de cálculos ésta devuelve el valor de $f(x)$:

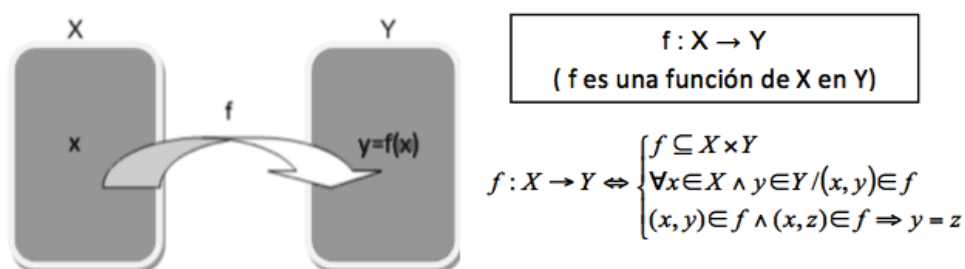




El concepto de función se define como un caso particular de relación: “una relación es una función sí y sólo sí todo elemento de A se relaciona con un solo elemento del conjunto B”.

Definición de función

Una función “f” de X en Y, denotada por $f: X \rightarrow Y$ es una relación entre dos conjuntos; llamados dominio (X) y el codominio (Y) de la función, tales que a cada elemento del dominio le corresponde uno y solamente un elemento del rango.



Función Real de Variable Real:

Si el dominio de una función es el conjunto o subconjunto de los números reales, lo mismo que el condominio, entonces se trata de una función real de variable real:

$$f = \{(x, y) / x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}; y = f(x)\}$$

Dónde: x= variable independiente
y= variable dependiente o función

El concepto de función se presenta de una manera descontextualizada y las situaciones problemas, o bien son ejemplos que sirven para ilustrar la definición o bien son problemas descontextualizados propuestos al final de la unidad con el objetivo de que los alumnos apliquen la definición de función. Es decir, las situaciones problemas tienen la función de concretar el concepto de función, pero en ningún caso sirven para que se construya dicho concepto a partir de ellas.

Por ejemplo:

- Todos los números reales tienen un cubo, por lo que existe la función «cubo» que a cada número en el dominio $\mathbb{R}$ le asigna su cubo en el condominio $\mathbb{R}$.



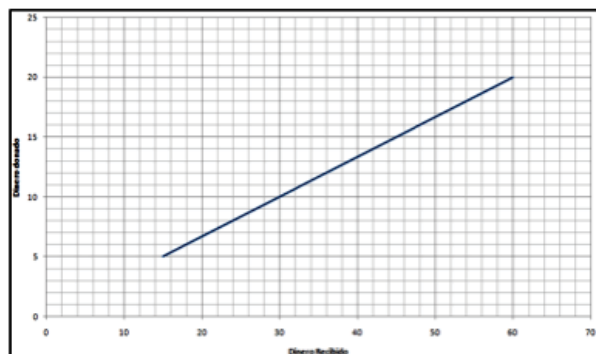
- Exceptuando al 0, todos los números reales tienen un único inverso. Existe entonces la función «inverso» cuyo dominio son los números reales no nulos $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ y con condominio $\mathbf{R}$.
- Existe una función «área» que a cada triángulo del plano (en la colección T de todos ellos, su dominio), le asigna su área, un número real, luego su condominio es $\mathbf{R}$.
- En unas elecciones en las que cada votante pueda emitir un único voto, existe una función «voto» que asigna a cada elector el partido que elija. En la imagen se muestra un conjunto de electores E y un conjunto de partidos P , y una función entre ellos.

Representación gráfica de una función

El lenguaje de las gráficas

De las distintas formas en que puede presentarse una función, mediante un enunciado, una tabla, una expresión algebraica o una gráfica, esta última es la que nos permite ver de un solo vistazo su comportamiento global, de ahí su importancia. En este tema aprenderás a reconocer e interpretar sus características principales.

Es el cumpleaños de Carlos y ha decidido que de cada Bs que reciba de regalo de sus familiares, donará una tercera parte a una fundación para la conservación del medio ambiente.



Hemos representado los pares de valores dinero recibido - dinero donado:

$(15, 5), (30, 10), (45, 15), (60, 20)$

Estos pares son las **coordenadas cartesianas** de puntos del plano.

Para representar gráficamente una función:

1. Se identifica la variable independiente y la variable dependiente.
2. Se hace una tabla de valores.
3. Se dividen los ejes de coordenadas en partes iguales que sean acordes con los resultados de la tabla.
4. Se representan los pares de valores y se obtiene un conjunto de puntos aislados.
5. Si tiene sentido, se unen los puntos, obteniéndose una línea que constituye la **gráfica** de la función.



Domino y recorrido

Tecleando su calculadora, Laura se ha dado cuenta de que la tecla de la raíz cuadrada $\sqrt{}$, define la función $y = \sqrt{x}$.

Así, al teclear 25 y pulsar la tecla de la raíz cuadrada, aparece en la pantalla 5.

Pero, al teclear -4 y pulsar la tecla de la raíz cuadrada, aparece en la pantalla ERROR (no hay ningún número que al elevarlo al cuadrado sea igual a -4).

Por tanto, -4 no es un valor válido de la variable independiente.



El conjunto de valores que puede tomar la variable independiente es el **dominio de la función**.

Después de teclear muchos números, Laura ha observado que ponga el número que ponga, después de pulsar la tecla de la raíz cuadrada, siempre aparece en pantalla un número positivo. Por tanto, los valores de la variable dependiente siempre son números positivos.

El conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente es el **recorrido de la función**.

Domínio y Rango de una Función

Sea $f: X \rightarrow Y$, llamaremos dominio de la función f al conjunto de todas sus primeras componentes, al cual denotaremos por D_f , es decir:

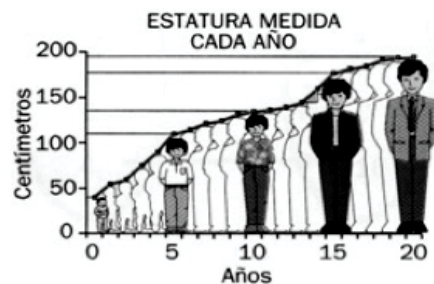
$$D_f = \{x \in X / \exists y \in Y \wedge (x, y) \in f\} \subseteq X$$

Y llamaremos rango de la función f al conjunto de las imágenes de todos los elementos de X , mediante f al cual denotaremos por R_f , es decir:

$$R_f = \{y \in Y / \exists x \in X \wedge (x, y) \in f\} \subseteq Y$$

Continuidad de funciones

La gráfica de la derecha muestra la estatura de una persona desde su nacimiento hasta los 20 años.

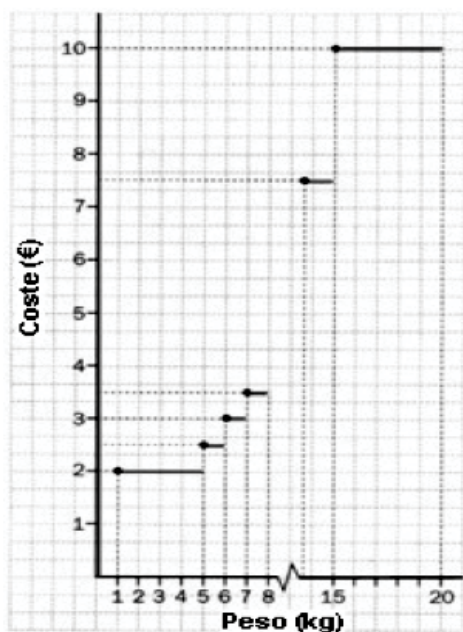


La gráfica no tiene saltos bruscos. Efectivamente es imposible, por ejemplo, que una persona salte de 160 cm a 170 cm sin pasar por las estaturas intermedias.

Las gráficas de las funciones que tienen esta característica se llaman **funciones continuas**.

La función que ves a la izquierda representa el coste de un envío postal según su peso. De 1 a 5 kg, sea cual sea el peso, cuesta 2 €, de 5 a 6 kg, cuesta 2,50 €, etc.

Como se ve en la gráfica, el coste no tiene una variación continua según el peso. La gráfica tiene saltos en 5 kg, 6 kg, 7 kg, pues en estos pesos se produce un aumento en el coste del envío. Estos puntos en los que la gráfica tiene saltos se llaman **puntos de discontinuidad**.



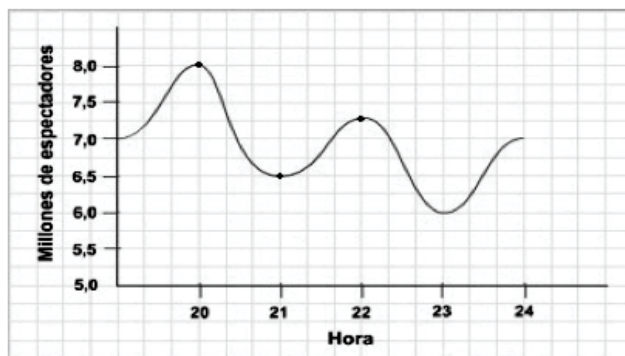
Una función es **continua** cuando a cualquier pequeña variación de la variable independiente le corresponde una pequeña variación de la variable dependiente.

Intuitivamente, una función es continua cuando se puede dibujar su gráfica sin levantar el lápiz del papel.

Los puntos en los que la gráfica de la función efectúa un salto se llaman **puntos de discontinuidad**.

Tasa de variación de una función

Esta gráfica representa la audiencia que tuvo un canal de televisión un determinado día:



¿Cuál ha sido la variación de la audiencia entre las 20 y las 21 h? ¿Y entre las 21 y las 22 h?

$$\text{Variación audiencia (20-21)} = \text{Audiencia (21 h)} - \text{Audiencia (20 h)} = 6,5 - 8 = -1,5$$

Esto quiere decir que entre las 20 y las 21 h se produjo una **disminución** de 1,5 millones de espectadores.

$$\text{Variación audiencia (21-22)} = \text{Audiencia (22)} - \text{Audiencia (21)} = 7,25 - 6,5 = 0,75$$

En este caso, entre las 21 y las 22 h se produjo un **aumento** de 750.000 espectadores.

Estas variaciones, ya sean aumento o disminución, se denominan **tasa de variación**.

La **tasa de variación** de una función $f(x)$ es el aumento o disminución que experimenta la función al pasar la variable independiente de un valor a otro.

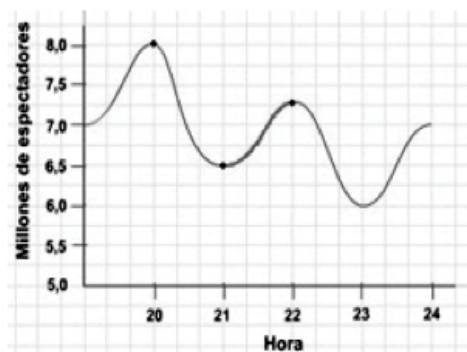
La **tasa de variación** entre $x = a$ y $x = b$ es: $TV [a, b] = f(b) - f(a)$

Crecimiento y decrecimiento

Una agencia publicitaria está estudiando la variación de la audiencia de un canal de televisión. Para ello, ha analizado la gráfica que hemos visto antes.

En la gráfica se observa que la audiencia sube entre las 21 y las 22 h. En este tramo de gráfica se cumple:

$$TV [21, 22] = 7,25 - 6,5 = 0,75 > 0$$



Como la tasa de variación es **positiva**, en esa franja horaria diremos que la función es **creciente**.

En cambio, la agencia ha observado que la audiencia baja entre las 22 y las 23 h:

$$TV [22, 23] = 6 - 7,25 = -1,25 < 0$$

Como la tasa de variación es **negativa**, en esa franja horaria diremos que la función es **decreciente**.

Una función $f(x)$ es: **Creciente** entre dos valores x y x' si la tasa de variación $f(x') - f(x)$ es positiva.

$$x < x' \rightarrow f(x) < f(x')$$

Es **Decrecente** si entre dos valores x y x' se verifica que la tasa de variación $f(x') - f(x)$ es negativa.

$$x < x' \rightarrow f(x) > f(x')$$



Máximos y mínimos de una función

La empresa publicitaria quiere saber cuáles fueron los momentos clave de audiencia de la cadena para organizar la campaña de un producto.

El agente que analiza estos momentos observa que a las 20 h y a las 22 h se producen picos de audiencia. A esas horas el número de espectadores deja de crecer y comienza a decrecer.

Por el contrario, a las 21 h y a las 23 h la audiencia alcanza valores mínimos, pues en ellos el número de espectadores deja de decrecer para comenzar a crecer.

Una función continua tiene:

Un **máximo** en un punto si a la izquierda de ese punto la función crece y a la derecha la función decrece.

Un **mínimo** en un punto si a la izquierda de ese punto la función decrece y a la derecha crece

Si observas una vez más la gráfica, comprobarás que el momento de mayor audiencia se produjo a las 20 h. Este punto es un **máximo absoluto**.

En cambio, el momento de menor audiencia se produjo justamente a las 23 h. Este punto es un **mínimo absoluto**.

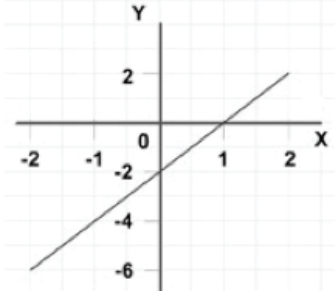
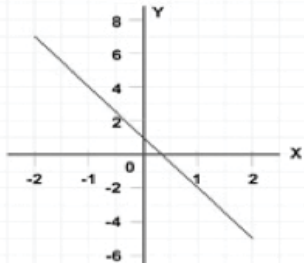
Pendiente y ordenada en el origen

Tanto en las funciones de la forma $y = mx$ como en las funciones de la forma $y = mx + n$, el valor de m (es decir, del coeficiente de la x) recibe el nombre de pendiente. La pendiente mide la inclinación de la recta con respecto al eje de abscisas. Así, cuanto mayor es la pendiente, más inclinada está la recta.

En las funciones de la forma $y = mx + n$, el valor de n recibe el nombre de ordenada en el origen; n es la ordenada del punto en el que la recta $y = mx + n$ corta al eje OY, es decir, aquel que tiene por abscisa $x = 0$.



Observa estos ejemplos:

Ecuación	Tabla	Gráfica	Pendiente	Ordenada en el origen												
$y = 2x - 2$	<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-2</td><td>-6</td></tr><tr><td>-1</td><td>-4</td></tr><tr><td>0</td><td>-2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table>	x	y	-2	-6	-1	-4	0	-2	1	0	2	2		$m = 2$	$n = -2$
x	y															
-2	-6															
-1	-4															
0	-2															
1	0															
2	2															
$y = -3x + 1$	<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-2</td><td>7</td></tr><tr><td>-1</td><td>4</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>-2</td></tr><tr><td>2</td><td>-5</td></tr></table>	x	y	-2	7	-1	4	0	1	1	-2	2	-5		$m = -3$	$n = 1$
x	y															
-2	7															
-1	4															
0	1															
1	-2															
2	-5															

En el primer ejemplo la recta es creciente. Observa que a medida que aumentan los valores de x aumentan también los valores de y , es decir, a medida que se avanza en la horizontal se produce un aumento de la vertical, siendo entonces la pendiente positiva.

Por el contrario, en el último ejemplo la recta es decreciente. En este caso, a medida que aumentan los valores de x disminuyen los valores de y , es decir, a medida que se avanza en la horizontal se produce una disminución de la vertical, siendo entonces la pendiente negativa.

Si la **pendiente** de una recta es **positiva**, la función es **creciente**.
 Si la **pendiente** de una recta es **negativa**, la función es **decreciente**.

Rectas paralelas y secantes

A las 10:30 de la mañana salió de La Paz una aeronave con destino a Lima a 300 km/h; a las 11 sale otra con el mismo destino y velocidad. ¿Cómo son las gráficas que representan el espacio recorrido por cada aeroplano desde las 11 de la mañana? Formamos las tablas de valores y representamos gráficamente los datos:



Tiempo en horas	Espacio recorrido por la aeronave de las 11 en km
11	0
12	300
13	600

Tiempo en horas	Espacio recorrido por la aeronave de las 10:30 en km
11	150
12	450
13	750

Ambas rectas son **paralelas**. ¿Tendrán sus expresiones algebraicas algo en común? Las expresiones del espacio recorrido en función del tiempo son:

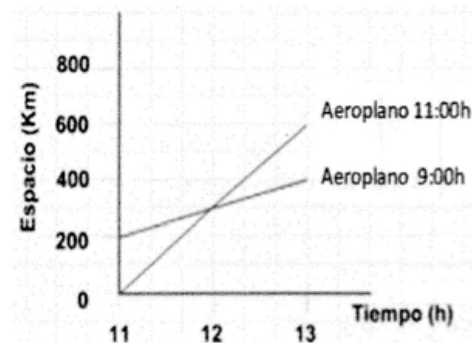
Aeronave de las 11 h → $y = 300x$

Aeronave de las 10:30 h → $y = 300x + 150$

Las dos rectas tienen el mismo coeficiente de la x , es decir, la **misma pendiente**.

A las 9 de la mañana salió otra aeronave a 100 km/h. ¿Cómo será su gráfica si la comparamos con el aeroplano de las 11? Hacemos una tabla de valores y representamos gráficamente los datos:

Tiempo en horas	Espacio recorrido por la aeronave de las 9 en km
11	200
12	300
13	400



Ambas rectas son **secantes**, pues a las 12 horas ambas aeronaves han recorrido la misma distancia, 300 km. Las expresiones algebraicas del espacio recorrido en función del tiempo son:

Aeronave de las 11 h → $y = 300x$

Aeronave de las 9 h → $y = 100x + 200$

Las rectas tienen distinto coeficiente de la x , es decir, **distinta pendiente**.

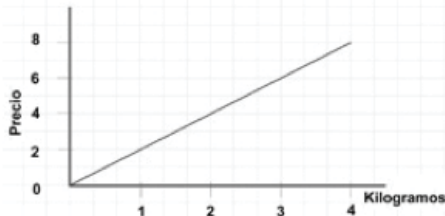
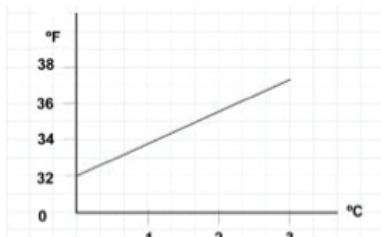
Dos **rectas son paralelas** si sus **pendientes son iguales**.

Dos **rectas son secantes** si sus **pendientes son distintas**



Tipos de funciones lineales

Las funciones cuyas gráficas son rectas se llaman **funciones lineales**.

Funciones del tipo $y = mx$											
Pedro ha acompañado a su padre al mercado y ha visto que 1 kilogramo de lechuga cuesta Bs 2. Las magnitudes "número de kilogramos" y "precio" son directamente proporcionales. Si llamamos x al número de kilogramos y y al precio en bolivianos, la relación $y = 2x$ es la ecuación asociada a la proporcionalidad anterior.											
Tabla de valores	Gráfica										
<table> <tr> <th colspan="2">Kilogramos Precio (Bs)</th></tr> <tr> <td>1</td><td>2</td></tr> <tr> <td>2</td><td>4</td></tr> <tr> <td>3</td><td>6</td></tr> <tr> <td>4</td><td>8</td></tr> </table>	Kilogramos Precio (Bs)		1	2	2	4	3	6	4	8	
Kilogramos Precio (Bs)											
1	2										
2	4										
3	6										
4	8										
Las gráficas de las funciones de la forma $y = mx$ son rectas que pasan por el origen de coordenadas .											
Funciones del tipo $y = mx + n$											
En España la temperatura se mide en grados Celsius ($^{\circ}\text{C}$), mientras que en Estados Unidos se utiliza la escala Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$). La fórmula que permite obtener la temperatura en $^{\circ}\text{F}$ conociendo la temperatura en $^{\circ}\text{C}$ es $y = 1,8x + 32$, donde x es la temperatura en grados Celsius y y la temperatura en grados Fahrenheit.											
Tabla de valores	Gráfica										
<table> <tr> <th>Celsius ($^{\circ}\text{C}$)</th><th>Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$)</th></tr> <tr> <td>0</td><td>32</td></tr> <tr> <td>1</td><td>33,8</td></tr> <tr> <td>2</td><td>35,6</td></tr> <tr> <td>3</td><td>37,4</td></tr> </table>	Celsius ($^{\circ}\text{C}$)	Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$)	0	32	1	33,8	2	35,6	3	37,4	
Celsius ($^{\circ}\text{C}$)	Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$)										
0	32										
1	33,8										
2	35,6										
3	37,4										
Las gráficas de las funciones de la forma $y = mx + n$ son rectas que no pasan por el origen de coordenadas .											

Relación entre magnitudes

En una zona del Puerto quieren construir una piscina de **forma cúbica**.

Se está pensando en la cantidad de agua que será necesaria para llenar la piscina. Esto dependerá de la longitud del lado con la que se construya dicha piscina.



La relación entre la **longitud del lado** de la piscina y el **volumen de agua** que contiene se puede representar de tres formas distintas: mediante **tablas, gráficas y fórmulas**.

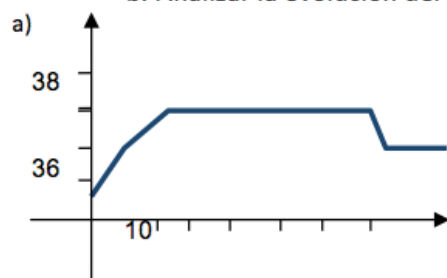
TABLA	GRÁFICA	FÓRMULA														
<table><tr><th>LONGITUD LADO (m)</th><th>VOLUMEN AGUA (m³)</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>8</td></tr><tr><td>3</td><td>27</td></tr><tr><td>4</td><td>64</td></tr><tr><td>5</td><td>125</td></tr><tr><td>6</td><td>216</td></tr></table>	LONGITUD LADO (m)	VOLUMEN AGUA (m ³)	1	1	2	8	3	27	4	64	5	125	6	216		El volumen del cubo (V) depende de la longitud del lado (a) La fórmula que relaciona V con a es: $V = a^3$
LONGITUD LADO (m)	VOLUMEN AGUA (m ³)															
1	1															
2	8															
3	27															
4	64															
5	125															
6	216															

La relación que existe entre dos magnitudes se puede expresar mediante **tablas, gráficas y fórmulas**.

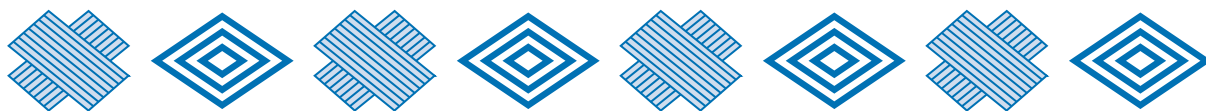
Aplicaciones prácticas

- 1) “Aplicaciones en la medicina”. Para controlar la evolución de un enfermo de gripe, se le tomó a éste la temperatura cada hora, desde las 10:00 am hasta las 20:00 pm.

- Transcribir los datos en una tabla y representar su gráfico.
- Analizar la evolución del enfermo.



- Al principio, a las 10:00 am el individuo empezó a tener fiebre, durante 6 horas se mantuvo con una temperatura de 38° ...
- 2) Por 325 fotocopias se pagó Bs 26.
- Determinamos la constante de proporcionalidad
 - Calculamos el importe de 500 fotocopias.
 - Anotemos y grafiquemos la función.



Solución:

$$a) \frac{26 \text{ Bs}}{325 \text{ Fot}} = 0,08 \frac{\text{Bs}}{\text{Fot}}$$

$$\begin{aligned} b) \text{ Para 500 fotocopias} \\ &= 500 \text{ fot} * 0,08 \frac{\text{Bs}}{\text{Fot}} \\ &= 40 \text{ Bs} \end{aligned}$$

$$c) \quad Y = 0,08 x ; \text{ donde } x \text{ es el número de fotocopias}$$

Aplicaciones prácticas:

Resolvemos las siguientes funciones aplicables a un contexto en específico:

1. Si la función ganancia, en la editorial "Amazónica", está dada por:

$$G(X) = -3x^2 + 96x + 552$$

Indicar como respuesta la suma de las cifras de la ganancia máxima.

2. La siguiente función indica el número de horas h que una persona joven de n años debe dormir.

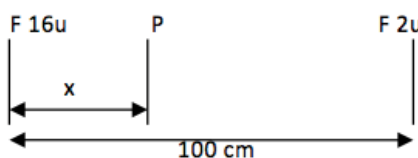
$$h = \frac{1}{2}(18 - n) + 8$$

Determina:

- a) Cuántas horas duerme un recién nacido.
 - b) Cuántas horas debes dormir.
 - c) Hasta qué edad te sirve la función.
3. Óptica: La intensidad de iluminación de una fuente de luz, en cualquier punto, es directamente proporcional a la fuerza de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde la fuente. Dadas dos fuentes de fuerza de 16 unidades y 2 unidades, separadas 100 cm, como lo muestra la gráfica, la intensidad I en cualquier punto P entre ellos está dada por:

$$I(x) = \frac{16}{x^2} + \frac{2}{(100-x)^2}$$

donde x es la distancia en centímetros desde la fuente de 16 unidades. Traza la gráfica de $I(x)$ para: $0 < x < 100$.



Las funciones matemáticas como modelo matemático

Dr. José Luis Díaz Gómez

Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora

El aplicar las matemáticas a los problemas de la vida real comprende tres etapas. Primero se traduce el problema a términos matemáticos, entonces decimos que tenemos un modelo matemático. Después se obtiene la solución del problema matemático. Por último, se interpreta esta respuesta matemática en términos del problema original.

En esta sección trataremos sólo el primer paso. De hecho, nuestra atención se enfocará a la determinación de la función o las funciones que involucran los problemas verbales.

La facultad para describir las relaciones funcionales que aparecen en un problema es una habilidad matemática que importa desarrollar. Por esta razón mostraremos algunos ejemplos tomados en diferentes campos.

Ejemplo 1

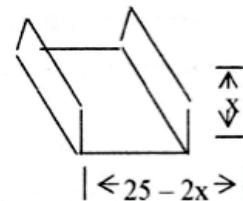
Un estacionamiento en la ciudad cobra Bs 20.00 por la primera hora y Bs 10.00 por cada hora adicional. Expresar la cuota de estacionamiento como una función del número de horas estacionadas.

Solución:

Si x representa el número de horas estacionadas, entonces la cuota de estacionamiento F estará dada por la fórmula $E = 50 - 25(x-1)$, donde x es un entero positivo.

Ejemplo 2

De una larga pieza de hoja de lata de 25 cm de ancho se va a hacer un canalón para lluvia, doblando hacia arriba sus orillas para formar sus lados. Expresar el área de la sección transversal del canalón para lluvia como una función de su altura.



Solución:

Si representamos por x la altura en cm del canalón para lluvia, podemos expresar el área de la sección transversal A en cm^2 por medio de la fórmula $A = x(25 - 2x)$

Ejemplo 3

Se sabe que 100 gramos de granos secos de soya contienen 35 gr de proteínas y 100 gr de lentejas secas contienen 26 gr de proteínas. Los hombres de talla media que viven en un clima moderado necesitan 70 gr de proteínas en su alimentación diaria. Supongamos que un hombre quiere conseguir esos 70 gr. de proteínas comiendo soya y/o lentejas. Sea x la cantidad de soya e y la cantidad de lentejas diarias (x e y medidas en gr), ¿cuál es la relación entre x e y ?



Solución:

La proteína ingerida por medio de la soya es $35x$ y por las lentejas $26y$ por día (ambas medidas en gr). La cantidad diaria total de proteínas es 70 gr. Por tanto, obtenemos la ecuación:

$$35x + 26y = 70 \quad (1)$$

Reordenando los términos podemos expresar y como función de x :

$$y = \frac{70 - 35x}{26} \quad (2)$$

Es claro que el dominio y el rango son $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Una ecuación como la (1) se llama función implícita y una ecuación como la (2) función explícita.

Ejemplo 4

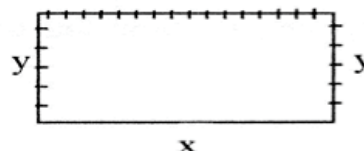
Un lote rectangular va a cercarse en tres de sus lados. Si el área del lote es de 30 metros cuadrados, exprese la longitud de la cerca como una función de la longitud del lado no cercado.

Solución:

Es natural empezar por introducir dos variables, digamos x , y , para denotar las longitudes de los lados del lote (figura). Entonces:

$$\text{Longitud de la cerca} = x + 2y$$

Como queremos la longitud de la cerca expresada como una función de x solamente, debemos encontrar una forma de expresar y en términos de x ; es decir, debemos encontrar una ecuación que relacione a x , y . El hecho de que el área sea de 30 metros cuadrados nos proporciona la ecuación.



Específicamente,

$$xy = 30$$

Resolviendo obtenemos:

$$y = 30/x$$

Reemplazando en la relación de la longitud de la cerca, se obtiene:

$$f(x) = x + 60/x$$

Donde f denota la longitud de la cerca.

La función $f(x)$ está definida para todos los valores de x excepto $x = 0$ y representa la longitud de la cerca si x es positiva.



Ejemplo 5

Una huerta de manzanos tiene 40 hectáreas y el promedio de producción es de 300 manzanas por árbol y por año. Si por cada árbol que se plante por hectárea, además de los 40, la producción promedio disminuye en 5 manzanas, exprésese la producción.

Solución:

La producción actual de la huerta puede obtenerse de la siguiente forma: $(300)(40) = 12.000$ manzanas por hectárea y por año, y en general la producción = (número de árboles por hectárea) (producción promedio anual de un árbol).

Representemos por x el número de árboles plantados, además de los 40. Puesto que la producción promedio por árbol disminuye en 5 manzanas por cada árbol plantado, entonces:

Producción: promedio anual de un árbol = $300 - 5x$; y la producción total será:

$$P = (40 + x)(300 - 5x)$$

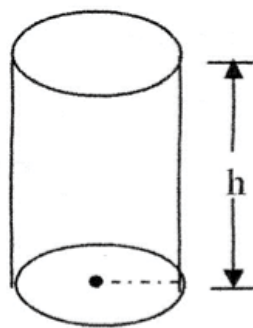
Obsérvese que $0 \leq x \leq 60$

Ejemplo 6

Se desea construir un recipiente con la forma de un cilindro circular sin tapa con un volumen de 24π centímetros cúbicos. El precio del material que se usa para el fondo es el triple que el del material que se usa para la parte curva. Expresa el costo del recipiente en función del radio de la base del cilindro.

Solución:

Comenzamos por hacer un dibujo como el de la figura. Denotamos por r el radio de la base del recipiente y por h la altura (en centímetros). Como el volumen de un cilindro circular es $V = \pi r^2 h$ y el volumen del recipiente pedido es de 24π cm. cúbicos, entonces tenemos:



$$\pi r^2 h = 24\pi$$

Esto nos da la relación

$$h = \frac{24}{r^2}$$

El costo total del recipiente es igual al costo de la parte curva más el costo de la base del cilindro.



Si P denota el precio por cm cuadrado del material que se usa para la parte curva, entonces el precio por cm cuadrado del material que se usa para el fondo será $3p$.

El costo de la parte curva del cilindro es igual al costo del área del rectángulo de base $2\pi y$ y altura h , es decir $C_c = P(2\pi y)$ pero $h = 24/y^2$.

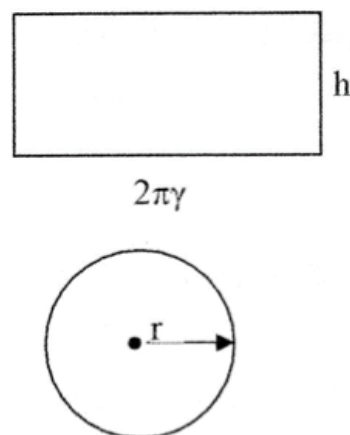
$$\text{Así } C_c = P(2\pi y)(24/y^2) = 48\pi p/y$$

El costo de la base del cilindro es

$$C_b = 3p(\pi y^2)$$

$$C = C_c + C_b = 48\pi p/y^2 + 3\pi p y^2$$

$$C = \pi p(3y^2 + 48/y) \quad y > 0$$



Ejemplo 7

Una compañía de autobuses ha adoptado la siguiente política de precios para los grupos que deseen alquilar autobuses. A los grupos que contengan un máximo de 40 personas se les cobrará una suma fija de Bs 2,400.00 (40 veces Bs 60). En grupos que contengan entre 40 y 80 personas, cada una pagará Bs 60.00 menos 50 centavos por cada persona que pase de las 40. La tarifa más baja de la compañía de Bs 40.00 por persona se ofrecerá a grupos que contengan 80 miembros o más. Expresa los ingresos de la compañía de autobuses como una función del tamaño del grupo.

Solución:

Usamos x para denotar el número de personas del grupo y $f(x)$ el ingreso correspondiente. Si $0 \leq x \leq 40$, el ingreso es simplemente $f(x) = 2,400$. Si $x \geq 80$, cada persona paga Bs 40.00 y por lo tanto el ingreso correspondiente es $f(x) = 40x$. La expresión para $f(x)$ cuando $40 < x < 80$ es algo más complicada. Comencemos nuestro análisis de esta situación con la relación básica.

$$\text{Ingresos} = (\text{número de personas}) (\text{tarifa por persona})$$

Como x denota el número total de personas del grupo, $x - 40$ es el número de personas que pasan de 40. La tarifa por persona es la original de Bs 60.00 reducida en $\frac{1}{2}$ peso por cada una de las $x - 40$ personas extras.

$$\text{Así: tarifa por persona} = 60 - \frac{1}{2}(x - 40) = 80 - \frac{1}{2}x.$$

Para obtener el ingreso, simplemente multiplicamos esta expresión por x , el número de personas del grupo.

$$\text{Así para } 40 < x < 80, \quad f(x) = 80x - \frac{1}{2}x^2.$$



Podemos resumir todos los tres casos en forma compacta como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 2,400 & \text{si } 0 \leq x \leq 40 \\ 80x - \frac{1}{2}x^2 & \text{si } 40 < x < 80 \\ 40x & \text{si } x \geq 80 \end{cases}$$

Aunque esta función $f(x)$ está definida para todos los valores no negativos de x , representa el ingreso de la compañía de autobuses solamente cuando x es un entero no negativo.

Actividad 1

Realizamos una investigación sobre “Consumo doméstico kw/h de energía eléctrica”, recurriendo para esto a facturas de LA PAZ, utilizando variables y representaciones gráficas para su comprensión e interpretación.

Tema 3: Modelización trigonométrica en las ciencias

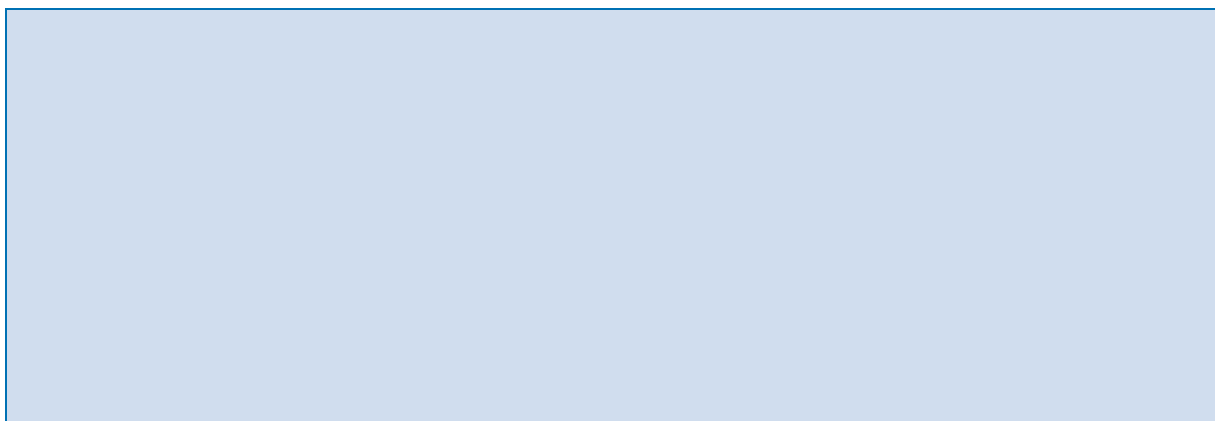
Preguntas problematizadoras

1. ¿Cómo utilizar las funciones trigonométricas en la vida cotidiana?

2. ¿Qué aplicaciones tecnológicas de las funciones trigonométricas conocemos? Describe cada una de ellas.



3. Desde tu experiencia como docente de matemática, ¿qué entendemos por modulación AM y FM, acústica y onda, cual es la aplicación tecnológica en la vida diaria?



Lecturas de trabajo para el tema 3

Las funciones trigonométricas: aplicaciones y uso de herramientas TIC

María del Carmen Cabrera Martín

La trigonometría es una ciencia antigua; no obstante, la sistematización de sus principios y teoremas no se produjo hasta el siglo XVI, para incorporarse como una herramienta esencial en los desarrollos del análisis matemático moderno.

Son extensas las aplicaciones que se le han dado a las funciones trigonométricas desde la antigüedad hasta nuestros días. Como aplicaciones de gran relevancia en la actualidad destacaremos el modelado de la corriente alterna y las modulaciones AM y FM.

Para facilitar el aprendizaje de las funciones circulares se puede hacer uso tanto de las calculadoras gráficas, como de actividades con el ordenador.

Introducción

En la historia de la trigonometría podemos remontarnos a las primeras matemáticas conocidas en Egipto y Babilonia. Los egipcios establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Sin embargo, hasta los tiempos de la Grecia clásica no empezó a haber trigonometría en las matemáticas. En el siglo II a.C. el astrónomo **Hiparco de Nicea** realizó una tabla trigonométrica para resolver triángulos, con resultados similares a los de la moderna tabla del seno.

Menelao escribió sus libros sobre las cuerdas de la circunferencia, que se sitúa hacia el fin del primer siglo de nuestra era. Este trabajo puede ser que tuviera modelos que se remontaban a Hiparco; la atención de las matemáticas fue atraída desde Menelao hacia “la semicuerda del arco doble” de nuestro seno, que desde entonces tiene un papel fundamental.

A final del siglo VIII los astrónomos árabes, que habían recibido la herencia de las tradiciones de Grecia y de la India, prefirieron trabajar con la función seno. En las últimas décadas del siglo X ya habían completado la función seno y las otras cinco funciones, y habían descubierto y demostrado varios



teoremas fundamentales de la trigonometría tanto para triángulos planos como esféricos. Todos estos descubrimientos se aplicaron a la astronomía y también se utilizaron para medir el tiempo astronómico y para encontrar la dirección de La Meca, lo que era necesario para las cinco oraciones diarias requeridas por la ley islámica.

El occidente se familiarizó con la trigonometría árabe a través de traducciones de libros de astronomía árabes, que comenzaron a aparecer en el siglo XII. El primer trabajo importante en esta materia en Europa fue de triángulos escrito por el matemático y astrónomo alemán Johann Muller, llamado Regiomontano.

En el siglo XVII, Isaac Newton inventó el cálculo diferencial e integral. Uno de los fundamentos del trabajo de Newton fue la representación de muchas funciones matemáticas utilizando series finitas de potencias de la variable x . Newton encontró la serie para el $\sin x$ y series similares para el $\cos x$ y la $\tan x$. Con la invención del cálculo las funciones trigonométricas fueron incorporadas al análisis, donde todavía hoy desempeñan un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.

Un siglo después, el matemático suizo Leonhard Euler fue el que fundó verdaderamente la trigonometría moderna y definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos. Esto convirtió a la trigonometría en sólo una de las muchas aplicaciones de los números complejos.

Euler demostró que las propiedades básicas de la trigonometría eran simplemente producto de la aritmética de los números complejos. Así, la llamada identidad de Euler es una de las fórmulas más importantes de la matemática, pues une de forma sintetizada distintos campos de esta ciencia:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

En ella se aúnan los números más importantes de la geometría, el análisis y el álgebra: e , i . Además, 0 y 1 son las bases de la aritmética por ser los elementos neutros respectivamente de la adición y la multiplicación.

Importancia

Las funciones trigonométricas son una de las funciones más utilizadas en matemáticas. Pero la importancia de estas funciones no termina en esta ciencia, ya que es utilizada por otras como lo son la física, la astronomía y la cartografía, entre otras.

Las fórmulas de la trigonometría son frecuentemente utilizadas en la construcción, topografía e ingeniería. Los constructores necesitan saber qué altura necesita una grúa para llegar a la cima de un edificio. Los diseñadores de los puentes necesitan saber qué tan alto debe abrir un puente levadizo para permitir que los buques modernos puedan pasar. La trigonometría consta de una serie de fórmulas que se ocupan de la longitud y los ángulos en un triángulo rectángulo. Si dos piezas de información se dan, luego una tercera pieza desconocida se puede calcular (Larry Pearson).

Funcion trigonométrica

Una función trigonométrica, también llamada circular, es aquella que se define por la aplicación de una razón trigonométrica a los distintos valores de la variable independiente, que ha de estar expresada en radianes. Como principales funciones trigonométricas se pueden encontrar:



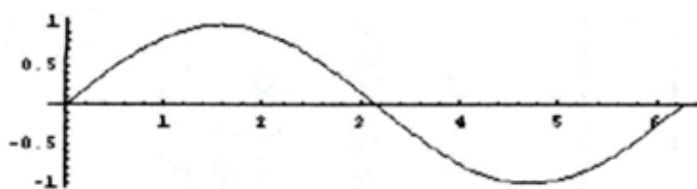
Función seno:

Ilustración 1. Periodo fundamental de la función seno.

Se denota por $f(x) = \text{sen } x$, a la aplicación de la razón trigonométrica seno a una variable independiente x expresada en radianes.

La función seno es periódica, acotada y continua, y su dominio de definición es el conjunto de todos los números reales.

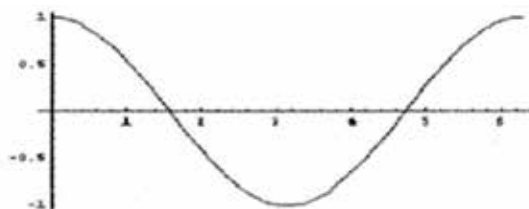
Función coseno

Ilustración 2. Periodo fundamental de la función coseno.

Se denota por $f(x) = \text{cos } x$ a la aplicación de la razón trigonométrica coseno a una variable independiente x expresada en radianes.

Esta función es periódica, acotada y continua, y existe para todo el conjunto de los números reales.

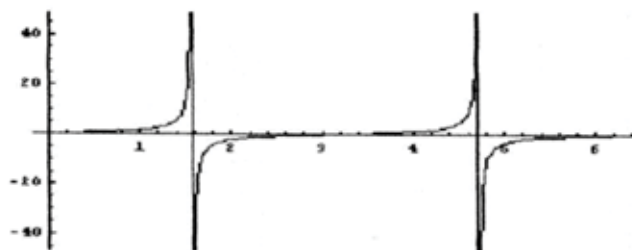
Función tangente

Ilustración 3. Periodo fundamental de la función tangente.

Se denota por $f(x) = \text{tg } x$ de una variable independiente x expresada en radianes a la aplicación de la razón trigonométrica tangente.

Existen seis clases de funciones trigonométricas: seno y su inversa, la cosecante; coseno y su inversa, la secante; y tangente y su inversa, la cotangente. Para cada una de ellas pueden también definirse funciones circulares inversas: arco seno, arco coseno, etc.



Aplicaciones

Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en las que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, como la distancia entre la Tierra y la Luna, o una distancia que no podía ser medida de forma directa. Otras aplicaciones de las funciones trigonométricas se pueden encontrar en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos, como el sonido o flujo de corriente alterna.

Nos concentraremos en 2 aplicaciones que pueden captar con más facilidad la atención del alumnado, ya que están inmersas en la vida cotidiana de la sociedad actual, como son la corriente eléctrica y la modulación AM y FM (que son la base de la radio AM y FM).

La corriente eléctrica

El termino corriente eléctrica se emplea para describir la tasa de flujo de carga que pasa por alguna región de espacio. La mayor parte de las aplicaciones prácticas de la electricidad tienen que ver con corrientes eléctricas. Por ejemplo, la batería de una luz de destellos suministra corriente al filamento de la bombilla cuando el interruptor se conecta.

Se denomina corriente alterna a la corriente eléctrica en la que la magnitud y dirección varían cíclicamente. La forma de onda de la corriente alterna más comúnmente utilizada es la de una onda sinusoidal, puesto que se consigue una transmisión más eficiente de la energía.

Se utiliza la función seno para modelar la corriente alterna senoidal, ya que presenta las siguientes ventajas:

- Se opera con facilidad y define con precisión analítica y gráfica la evolución de la intensidad a lo largo del tiempo.
- Se puede generar con facilidad en magnitudes de valor muy elevado.
- Se modifican con facilidad los valores de tensión e intensidad mediante transformadores.
- Todas las ondas no senoidales se pueden descomponer en ondas senoidales de diferentes frecuencias (armónicos).

Definición matemática

Como ya hemos dicho, la onda senoidal de CA tiene una expresión matemática que corresponde a la función seno. La expresión $y = \sin \alpha$ define la función seno, pero cuando se trata de magnitudes en CA es necesario expresarlas en función del tiempo transcurrido.

El ángulo está relacionado con el tiempo mediante la expresión: $\omega = \alpha/t \rightarrow y = \sin \omega.t$

Siendo:

ω : Velocidad angular en rad/s

α : Ángulo descrito en radianes

t: Tiempo transcurrido en segundos.



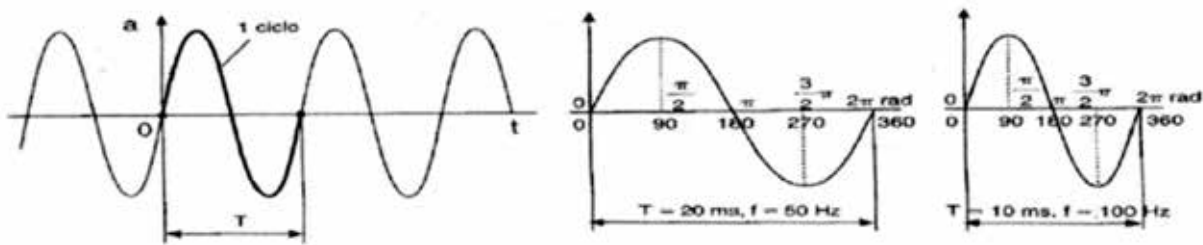


Ilustración 4. Periodo fundamental de la función coseno.

En la ilustración 4 se muestra cómo se modela la corriente alterna mediante la función seno. que Ahora tendremos que la variable independiente es el tiempo, que como se ha visto se puede relacionar con el ángulo. En la primera figura se ve cómo a un periodo T se le llama ciclo. En la segunda figura se muestra un periodo de 20ms, lo que equivale a una frecuencia de 50 Hz (recordemos que la frecuencia es la inversa del periodo). Esta frecuencia es la que tiene la corriente eléctrica en Europa. En la última figura se muestra el periodo fundamental para la corriente eléctrica americana (frecuencia de 100 Hz).

Modulaciones

Se puede definir la palabra modular como: “Variar el valor de la amplitud, frecuencia o fase de una onda portadora en función de una señal”. En efecto, en nuestro caso vamos a ver cómo se varía el valor de la amplitud de la onda portadora en función de la moduladora para la modulación AM, y en el caso de la modulación FM se variará la frecuencia. Nuestras ondas portadoras serán ondas sinusoidales.

Modulación AM

La amplitud modulada (AM) o modulación de amplitud es un tipo de modulación lineal que consiste en modificar la amplitud de una señal de alta frecuencia, denominada portadora, en función de una señal de baja frecuencia, denominada moduladora, la cual es la señal que contiene la información que se desea transmitir.

La AM es usada en la radiofonía, en las ondas medias, ondas cortas e incluso en la VHF: es utilizada en las comunicaciones radiales entre los aviones y las torres de control de los aeropuertos.

Definición matemática

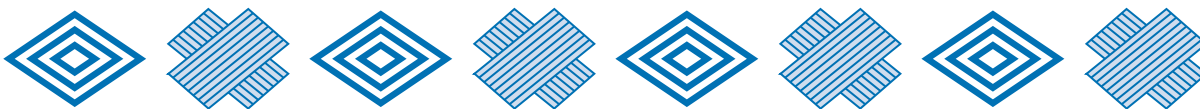
La ecuación de la señal modulada en AM es la siguiente:

$$y(t) = A_p \cdot [1 + m \cdot x_n(t)] \cdot \cos(w_p \cdot t)$$

Siendo:

- $y(t)$ = Señal modulada.
- $x_n(t)$ = Señal moduladora normalizada.
- m = Índice de modulación normalizado.

Simplemente se trata de multiplicar el mensaje a transmitir $x(t)$ por la portadora cosenoidal y, a su vez, sumarle esa portadora cosenoidal. En la ilustración 5 se muestra:



La señal moduladora, un coseno de baja frecuencia en el que va la información que queremos transmitir.

La señal portadora, otro coseno de alta frecuencia que no lleva ninguna información.

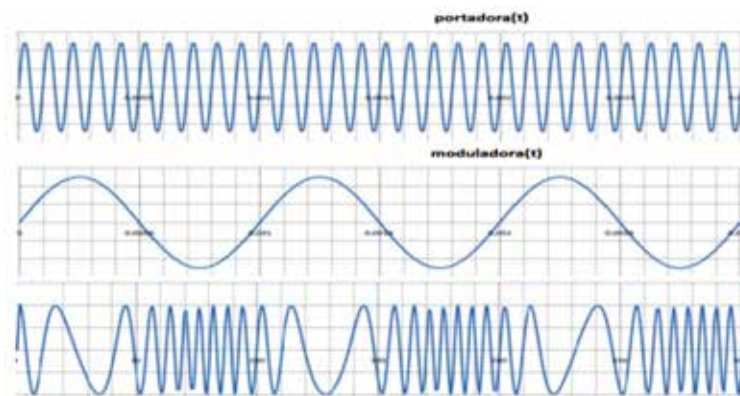
La señal modulada, la señal que nos queda tras aplicar la modulación en AM.

Modulación FM

La frecuencia modulada (FM) o modulación de frecuencia es una modulación angular que transmite información a través de una onda portadora variando su frecuencia.

Es usada comúnmente en las radiofrecuencias de muy alta frecuencia por la alta fidelidad de la radio-difusión de la música y el habla. El sonido de la televisión analógica también es difundido por medio de FM. También se utiliza para comunicaciones de voz en la radio comercial y en las configuraciones de aficionados. Además, se utiliza como ayuda en navegación aérea.

En el caso de la modulación FM, no entraremos en mucho detalle en su definición matemática por ser más compleja. Pero en la ilustración 6 se muestra una modulación en FM: la señal a) es la portadora, de mayor frecuencia; la señal b) es la señal moduladora, en la que va la información que queremos transmitir; y la señal c) es la señal modulada. Podemos observar cómo en el caso de la modulación FM la amplitud permanece constante y cuando hay variaciones de la señal moduladora, ahora es la frecuencia la que va a variar.



Uso de herramientas TIC

El uso de herramientas TIC a la hora de estudiar las funciones circulares es de gran utilidad, ya que no sólo facilitan la representación gráfica de las funciones circulares, sino que muestran esta con una completa exactitud, de forma que para el alumno sea más fácilmente comprensible. Esto también permite al profesor mostrar al alumno la dualidad entre la exactitud que se consigue con las herramientas TIC y las aproximaciones en la representación hechas en el papel.

Actividades con la calculadora

Es destacable la experiencia hecha en Francia entre 1995 y 1997 por Michele Artigue, sobre el uso de calculadoras gráficas en clases de Matemáticas. Al introducir una expresión en la TI-92 o en la TI-89, el



estudiante se enfrenta con el resultado de una evaluación realizada automáticamente por la calculadora. Este resultado puede ser muy diferente a la expresión inicial; el estudiante está en una posición diferente de aquella que corresponde al trabajo en papel y lápiz en la que, simplificando gradualmente, él sabe cuáles son las diversas expresiones intermedias que él mismo ha producido.

Ruthven (1990) sostiene que una mayor exposición a imágenes gráficas simbólicas a través del uso regular de la calculadora gráfica incrementa la competencia y la confianza de los estudiantes. Por lo tanto, la representación gráfica con calculadora de las distintas funciones trigonométricas es recomendable a la hora de abordar el estudio de las funciones circulares.

Actividades con el ordenador

Lo que en primer lugar se pide del software y de las herramientas de cómputo es que sean instrumentos pedagógicos. Deben permitir aprender mejor el contenido y los valores de las matemáticas que han sido definidos sin tomar en cuenta estas herramientas.

Los americanos piensan que el alumno tiene grandes dificultades de trabajar los conceptos adquiridos delante del ordenador a otras situaciones, y más especialmente si el ordenador es utilizado muy espaciadamente. En su investigación Doerr y Zangor (2000) sugieren que son necesarias más de 10 sesiones seguidas con ordenador para adquirir los esquemas de uso del ordenador necesarios para tener el comportamiento que espera el profesor.

Por lo tanto, las herramientas usadas con el ordenador para el estudio de las funciones circulares deberán ser simples en su utilización. Por ello es recomendable el uso del proyecto Descartes, u otros métodos parecidos, en los que el uso del software sea relativamente simple.

La acústica, las ondas, su representación gráfica, aplicación tecnológica

Claudio Cortés Polanco

El **movimiento ondulatorio** es el que se produce en una superficie líquida o en las partículas de un medio elástico al paso de las ondas. Las ondas mecánicas se originan cuando una parte de cierto medio elástico se desplaza de su posición.

Es importante este tema de las ondas, porque veremos que conceptos de la mecánica ondulatoria están íntimamente ligados a la física cuántica. Un autor señala que usar a las ondas ordinarias en formas o maneras inusuales es el secreto de la teoría cuántica. Todas las ondas, no importa cuáles sean, están construidas con un mismo plan y toman sus órdenes del mismo libro; de allí que las ondas cuánticas seguirán las mismas reglas que las ondas en general.

La mayoría de las personas ha tenido experiencia con las ondas; por ejemplo al lanzar una piedra en un pozo de agua se forman ondas; si ponemos un corcho veremos que el mismo se mueve hacia arriba y hacia abajo pero que no se traslada en la dirección que vemos se trasladan las ondas, como círculos que se abren desde el centro donde cayó la piedra. Estas ondas acuáticas constituyen un ejemplo de una amplia variedad de fenómenos físicos que presentan características análogas a las ondas.

El mundo está lleno de ondas: ondas sonoras, mecánicas, tales como la onda que se propaga en una cuerda de una guitarra, ondas sísmicas que pueden transformarse en terremotos, ondas de choque que se producen cuando por ejemplo un avión supera la velocidad del sonido, y otras ondas más particulares



porque no son tan fácilmente captadas con los sentidos o no es tan sencillo interpretar su origen; son las ondas electromagnéticas. Entre éstas están la luz visible, las ondas de radio, las señales de TV, los rayos X, muchas de las cuales permiten el funcionamiento de algunos aparatos conocidos por todos: el control de canales de tv, los teléfonos móviles, televisión por cable, etc.

El concepto de onda es abstracto. Las ondas que viajan en un medio material se denominan ondas mecánicas. Cuando se observa lo que denominamos una onda en el agua, lo que en realidad se contempla es una nueva disposición de la superficie del agua; sin la presencia del agua no existiría las ondas.

Si fijamos el extremo de una cuerda y movemos el otro extremo hacia arriba y hacia abajo, vemos cómo a lo largo de la cuerda se mueve una onda. Si no existiera la cuerda no existiría la onda. Las ondas sonoras viajan por el aire como un resultado de las variaciones de presión en el aire de punto a punto. En todos los casos, lo que se puede decir es que una onda corresponde a la perturbación de un cuerpo o un medio.

Una onda mecánica lo es el sonido. Cuando una fuente produce un sonido, éste se propaga gracias al medio material. El tipo de onda al que pertenece el sonido es el transversal, ya que las partículas del medio alcanzadas por el sonido se mueven en forma vertical; la oscilación de la partícula nos permite afirmar que el movimiento es periódico.

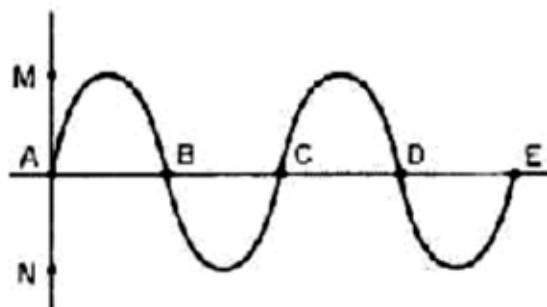
¿Qué es una onda?

Es una perturbación que sin ser en sí mismo algo material viaja de un sitio a otro transportando energía.

La elasticidad de la materia provoca la transmisión de la perturbación entre las capas, con lo que la forma de la onda se propaga a través del medio.

En un movimiento ondulatorio se transmite energía de una partícula a otra pero no materia, y dicha transmisión está condicionada por la capacidad del medio para propagar las ondas.

Representación gráfica de una onda



Elementos de una onda:

Son los siguientes: la cresta, el valle, la longitud de onda y la amplitud.



La cresta (C)

Es el punto que ocupa la posición más alta en una onda.

Valle (V)

Es el punto más bajo de la onda.

Elongación

Es la distancia comprendida entre la posición de equilibrio de un punto en oscilación y la posición donde se encuentra un objeto en un instante determinado.

La amplitud

Cuando se mantiene tensa una cuerda que está sujeta por el otro extremo, esta cuerda está en equilibrio. Si se le comunica un impulso hacia arriba, se produce una onda, porque se origina una separación en la parte que está más próxima a sus manos. La preparación entre su posición de equilibrio y su máxima altura es la amplitud (A).

La longitud

La distancia entre dos crestas consecutivas de una misma onda entre dos valles consecutivos; generalmente, la longitud de onda se considera como la distancia entre dos puntos que están en el mismo estado de vibración.

Onda completa

Es cuando todo el punto de oscilación ha tomado todo los valores positivos y negativos.

El período

Cuando producimos ondas en sucesivos impulsos hacia arriba y hacia abajo, las ondas formadas viajan. El tiempo que se toma una onda en pasar por un punto del medio material perturbado es lo que constituye el período. Se designa por P.

La frecuencia

Si por el contrario controlamos el número de ondas que pasan por un punto la unidad de tiempo, entonces nos referimos a la frecuencia. Se designa por F.

CLASIFICACIÓN DE LAS ONDAS**Ondas mecánicas**

Consiste en la propagación de una vibración o perturbación a través de un medio material elástico (sólido, líquido, gaseoso, transportando energía sin que exista desplazamiento del medio material junto con la perturbación. Las ondas mecánicas requieren de un medio natural o elástico que vibre; por ejemplo, las ondas en el agua y en la cuerda.



Ondas electromagnéticas

Las ondas electromagnéticas ocurren como consecuencia de dos efectos:

Un campo magnético variable genera un campo eléctrico.

Un campo eléctrico variable produce un campo magnético.

Las fuentes de radiación electromagnética son cargas eléctricas aceleradas, es decir que cambian con el tiempo su velocidad de movimiento. Las ondas radiadas consisten en campos eléctricos y magnéticos oscilatorios que están en ángulo recto (perpendiculares) entre sí y también son perpendiculares (ángulo recto) a la dirección de propagación de la onda; esto significa que las ondas electromagnéticas son por naturaleza transversales.

Vemos entonces que en todos los casos un campo es algo que existe por definición para explicar la fuerza que actúa sobre una partícula de referencia cuando está situada en un punto del espacio. En todos los casos, la intensidad del campo disminuye a medida que aumenta la distancia entre la partícula de referencia y la fuente que origina el campo. James Clerk Maxwell demostró que las amplitudes de los campos eléctricos y magnéticos de una onda electromagnética están relacionadas.

Las ondas electromagnéticas cubren un amplio espectro de frecuencias. Dado que todas las ondas electromagnéticas tienen igual velocidad c (velocidad de la luz) que es una constante, la relación $c = f \cdot \lambda$ define todo el espectro posible, abarcando desde las ondas de radio de baja frecuencia y gran longitud de onda, las cuales son ondas electromagnéticas producidas por cargas que oscilan en una antena transmisora, las ondas de luz con frecuencias mayores (cada color de la luz blanca corresponde a una longitud de onda determinada) que se producen cuando determinados electrones oscilan dentro de los sistemas atómicos.

Las ondas electromagnéticas fuera del campo visible como las ultravioletas, los rayos x, los rayos gamma, rayos cósmicos, que son vibraciones de otros electrones, o desaceleraciones de los mismos.

Ondas transversales

La perturbación del medio se lleva a cabo en dirección perpendicular a la de propagación. En las ondas producidas en la superficie del agua las partículas vibran de arriba abajo y viceversa, mientras que el movimiento ondulatorio progresa en el plano perpendicular. Lo mismo sucede en el caso de una cuerda; cada punto vibra en vertical, pero la perturbación avanza según la dirección de la línea horizontal. Ambas son ondas transversales.

Ondas longitudinales

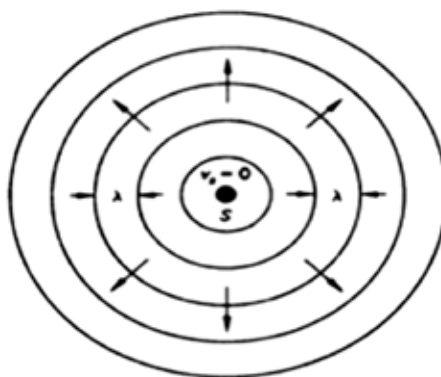
Las ondas longitudinales las podemos observar con mayor y mejor facilidad en un resorte, pues cuando éste se deforma y es liberado, se produce una vibración y las partículas del medio se mueven en la misma dirección de propagación (resorte). En este caso dan lugar al sonido.

¿Qué es una onda sonora?

Las ondas sonoras son esféricas pues se propagan en todas las direcciones según todos los radios de una esfera en cuyo centro se encuentra la fuente que vibra. Estas no sólo se propagan en el aire sino también en todos los medios materiales (sólido, líquido y gaseoso).



REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA ONDA SONORA



¿Qué es sonido?

El término sonido define solamente las oscilaciones que pueden dar lugar a una sensación auditiva en el oído humano y, por lo tanto, puede considerarse constituido por los movimientos ondulatorios que se propagan con unos valores de frecuencia que oscilan entre los 16 y los 20.000 Hz, intervalos de frecuencia que constituyen la denominada banda acústica física, la voz. No obstante, en el campo de la acústica física la voz sonido se extiende a cualquier movimiento ondulatorio, independientemente de la magnitud de la frecuencia. Los sonidos audibles presentan frecuencias cuyos valores están comprendidos en el citado intervalo, mientras los sonidos no audibles se diferencian en infrasonidos con frecuencias inferiores a los 16 Hz y ultrasonidos, cuyo límite se sitúa en los 20.000 Hz.

Los sonidos, como cualquier otro tipo de onda, pueden reflejarse, refractarse y difractarse. Estos términos han podido ser observados directamente mediante la utilización de la técnica llamada fotografía relámpago: una onda dirigida sobre una interfase frente a una placa fotográfica se ilumina durante un mínimo intervalo de tiempo por medio de una descarga eléctrica. El casi inapreciable incremento de la densidad en una onda de condensación induce a la refracción de la onda, lo que da lugar a la formación de una sombra que queda registrada en la placa fotográfica.

Frecuencia

Es el número de vibraciones que un cuerpo oscilante lleva a cabo en un segundo y es la inversa del periodo definido como el tiempo empleado por un cuerpo para completar una vibración. La relación entre ambas magnitudes es:

$$T = \frac{1}{f} \text{ y } \frac{f}{T} = 1$$

Definición de sonido. Algo vibra, algo suena

El sonido es un fenómeno físico asociado a la vibración (movimiento oscilatorio muy rápido). El sonido se produce cuando un objeto (cuerpo sonoro) vibra. Esta vibración se transmite a través de un medio (gaseoso, sólido o líquido) en forma de ondas sonoras. Nuestro sistema auditivo detecta esas ondas, produciéndose entonces la sensación auditiva. La vibración es tan importante en el sonido, que podemos afirmar que cuando algo vibra, algo suena; y si no hay vibración, no hay sonido.



Transmisión del sonido. El medio

El sonido necesita un medio transmisor para propagarse. Normalmente percibimos el sonido a través del aire (medio gaseoso), ya que es nuestro medio natural. Pero también puede transmitirse por el agua o a través de un sólido. De hecho, nos sorprendería saber que el sonido se transmite con más rapidez en medios sólidos, y en cambio en el aire alcanza velocidades más moderadas, 340 m/s.

VELOCIDAD DEL SONIDO EN DISTINTOS MEDIOS	
El aire	340 m/s
El agua	1.438 m/s
El acero	5.200 m/s
El aluminio	6.400 m/s

Representación gráfica del sonido

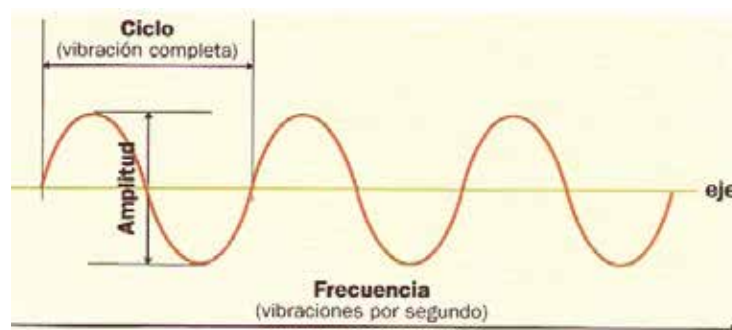
¿Puede representarse gráficamente el sonido, algo tan inmaterial e invisible? Pues sí, el sonido se puede representar mediante gráficos que describen la onda vibratoria. En ella podemos diferenciar varias variantes:

1. **Amplitud:** distancia entre los puntos más alto y más bajo de la onda, determina la **intensidad**.
2. **Frecuencia:** es el número de ciclos por segundo o vibraciones por segundo, determina la **altura**.
3. **Longitud:** la longitud de la onda irá asociada a la **duración** del sonido.
4. **Forma:** la onda de cada sonido tiene una forma determinada y característica, que diferencia unos sonidos de otros, es el **timbre**.

Oír y escuchar

Aunque aparentemente no haya diferencia entre estas dos palabras, son acciones muy distintas. Oír es una acción casi involuntaria, oímos igual que respiramos, sin darnos cuenta. Pero cuando escuchamos prestamos toda nuestra atención, convirtiéndonos en seres sensibles al sonido. La escucha de obras musicales requiere, además de nuestra atención, un buen entrenamiento auditivo, sobre todo si queremos analizar algunos de los muchos componentes que intervienen en ella.

Contaminación acústica



El sonido nos rodea, forma parte de nuestras vidas, pero como sucede con todo, en exceso puede ser perjudicial. La contaminación acústica es todo ese ruido que nos rodea, queramos o no, deteriora el medio ambiente y nos perjudica. Algunos de sus efectos son el dolor de cabeza, el estrés, el insomnio, la pérdida parcial de audición o incluso la sordera. Las ciudades suelen ser los mayores focos de contaminación acústica.



Los ultrasonidos

Son ondas de frecuencia superior a 20000 Hz. No pueden ser detectados por el oído humano.

Para una misma amplitud un ultrasonido emite mucho más energía que un audible puesto que tiene más frecuencia.

Aplicaciones de los ultrasonidos

Sonar: Es un instrumento que utilizan los barcos para detectar la profundidad a la que se encuentra el fondo marino o algún objeto que esté debajo de la superficie del agua. Emite ultrasonidos que se reflejan en el fondo o en el obstáculo (irregularidades del fondo, submarinos, bancos de peces). Por el tiempo que tarda en captar el eco se puede determinar la distancia que separa el sonar (el barco) del obstáculo que lo produce. Se utiliza en estudios oceanográficos (fondo marino), barcos de pesca (bancos de peces), militar (detección de submarinos), estudio geológico del suelo (encontrar petróleo).

Radar: Es similar al sonar, pero utiliza ondas electromagnéticas (microondas). Ambos permiten determinar la posición de los objetos, su trayectoria y su velocidad. El radar tiene uso militar, en la navegación aérea y marítima y en el tráfico terrestre.

Ecografía: Consiste en registrar los ecos ultrasónicos producidos por los distintos órganos corporales. Se hace incidir los ultrasonidos en una zona concreta del cuerpo y a medida que penetran en él son reflejados en aquellos puntos en los que cambia la densidad del cuerpo (zona que separa dos órganos). Los ultrasonidos reflejados se recogen en un aparato electrónico que analiza la posición de los tejidos, visualizándolos en un monitor en forma de puntos de diferente brillantez. La imagen obtenida puede ser estática, o si se reproducen tomas sucesivas puede simular el movimiento del interior del cuerpo. Ejemplo: el seguimiento de los embarazos. Se pueden visualizar múltiples zonas internas sin producir ningún daño, lo que no ocurre con los rayos X.



La ecografía es útil en el estudio de la cavidad abdominal, el hígado, el bazo, el páncreas, los riñones, el útero, los vasos sanguíneos... Adquirió popularidad la ecografía del feto, que permitía conocer el sexo del futuro niño o niña, pero su interés fundamental radica en que con ellas se puede detectar precozmente enfermedades o anomalías del feto.

Litotricia: consiste en utilizar ultrasonidos de alta energía pero de corta duración (ondas de choque) para fragmentar cálculos renales y biliares, evitando intervención quirúrgica. También se utiliza para acelerar la recuperación de lesiones traumáticas ya que aumentan la vascularización de la zona inflamada facilitando su curación.

Industria: Su elevada frecuencia permite que se unan pequeñas partículas. Los ultrasonidos se utilizan para precipitar partículas sólidas en humos y aerosoles, para separar la grasa en el agua, para reducir la espuma en el envasado de bebidas a alta velocidad. También permite ayudar a determinar si una pieza tiene defectos de fabricación (grietas internas, poros...).

En el mundo animal los murciélagos emiten y escuchan ultrasonidos. Su sistema de navegación es similar a un sonar que les permite volar en la oscuridad. También las ratas, delfines y langostas utilizan ultrasonidos para obtener información del medio y comunicarse. Elefantes, ballenas y algunas aves usan infrasonidos.

Actividad 1. A partir de la lectura anterior, realizamos en grupo comunitario un ejemplo de modelización matemática.

Actividad 2. Elaboramos un plan de clase desarrollando un modelo matemático y elaboramos el material educativo correspondiente.

PLAN DE DESARROLLO DE CONTENIDOS Y EJES ARTICULADORES

Campo :

Área :

Fecha :

Año de escolaridad:

Tiempo :

TEMÁTICA ORIENTADORA:		
PROYECTO SOCIOPRODUCTIVO:		
OBJETIVO:		
CONTENIDOS Y EJES ARTICULADORES:		
PROCESOS DIDÁCTICOS	RECURSOS/ MATERIALES	EVALUACIÓN
Práctica		
Teorización		



Valoración		
Producción		
PRODUCTO:		

Firma del/la Maestro/a

Firma del/la Responsable

II. Actividades de formación comunitaria

Reunidas en sus CPTes después de haber leído la lectura obligatoria común, “El grito manso” de Paulo Freire, Siglo XXI. 2003, reflexionamos colectivamente sobre los capítulos 2, 3 y 4 (páginas 28 a 65) y, con el aporte de maestras y maestros, elaboramos un ensayo crítico que exprese la problematización de las lecturas a partir de nuestra práctica educativa.

El ensayo crítico-reflexivo se desarrollará bajo las siguientes características:

Nº	Aspectos	Especificaciones
1	Extensión del ensayo	- De 2 a 4 páginas
2	Estructura del ensayo	- Introducción - Un desarrollo temático de sus argumentos y reflexiones desde el área - Conclusiones - Referencias bibliográficas
3	Papel	- Tamaño carta - Impreso en una sola cara de la hoja
4	Márgenes	- Izquierda 3.5 cm - Derecha 2.5 cm - Arriba 2.5 cm - Abajo 2.5 cm
5	Tipo y tamaño de letra	- Tahoma Nº 11
6	Párrafos	- Interlineado 1.5
7	Sistemas de cita	- APA o MLA
8	Carátula	

III. Actividades de concreción educativa

A partir de la metodología desarrollada en la sesión presencial, realizamos la articulación de la Áreas, cumpliendo nuestra planificación anual bimestralizada. Este proceso de articulación de las Áreas se rea-



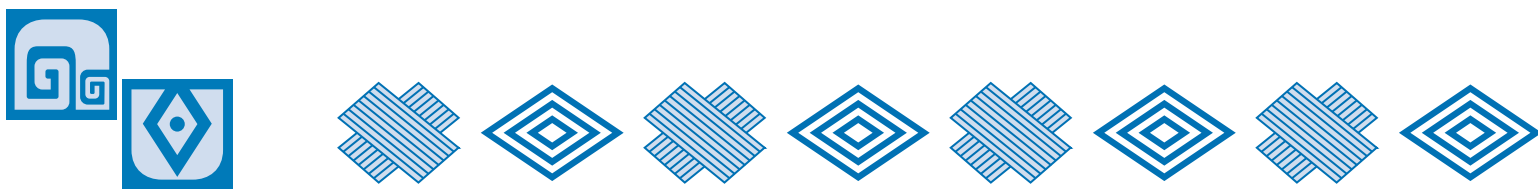
liza con relación al PSP. Es importante tomar en cuenta que este proceso debe ser llevado a cabo con la participación de las y los colegas de nuestro nivel (aunque no sean parte de nuestra CPTE).

La experiencia desarrollada en el proceso de articulación de las áreas en nuestra unidad educativa deberá ser sistematizada, para lo que se podrán tomar en cuenta los siguientes ámbitos o aspectos para dicha tarea:

Elementos curriculares:

- **Elaboración de materiales educativos.** Uno de los elementos curriculares a recuperar de las concreciones de la planificación curricular pueden ser los materiales educativos; por ejemplo, cómo la elaboración y aplicación de estos materiales han permitido el desarrollo de un currículo articulado; puede suceder que el uso de determinados materiales educativos sea el elemento que permita la articulación de las áreas.
- **Diseño de estrategias metodológicas.** Aquí se podrían haber diseñado e implementado metodologías específicas que, siguiendo las orientaciones metodológicas, sirvan para abordar un currículo articulado. Es probable que ciertas actividades permitan una mayor articulación de contenidos de diferentes áreas; o, por otra parte, puede reflexionarse —en la sistematización— sobre problemáticas sociales (por ejemplo, si la problemática es la violencia basada en género, se puede requerir reflexionar sobre cómo la didáctica tradicional ha ayudado a menospreciar los aportes realizados por las estudiantes y proponer didácticas transformadoras en el sentido que sean despatriarcalizadoras).
- **Proceso de evaluación.** La evaluación también es un elemento curricular que se concretiza en el desarrollo curricular articulado; por ejemplo, será importante reflexionar cómo evaluar el desarrollo de las dimensiones en el desarrollo de un currículo articulado; probablemente pueda abrirse a ser evaluados por varias maestras y maestros a la vez, etc.
- **Producción de conocimientos y recuperación de saberes.** A partir de la problematización de la realidad o problematización de los contenidos se tiene muchas posibilidades de abrir espacios de producción de conocimientos; por otra parte, las metodologías investigativas también pueden proyectar la articulación de contenidos tanto como la profundización de una especialidad. Por ejemplo, la didáctica del estudio de caso (en ella se investiga un problema social desde varias ciencias; participan estudiantes de un mismo curso con maestros de diferentes materias, investigando un problema del contexto o recuperando saberes del contexto, pero desde varios puntos de vista, que en este caso son los propios de cada área de saberes y conocimientos).

Las y los participantes elegirán una o más de estas opciones que están presentes en la planificación y desarrollo curricular; la importancia de sistematizar uno de estos ámbitos está en que se mostrará cómo estos elementos curriculares permiten o coadyuvan en la planificación y desarrollo de un currículo articulado.



Momento 3

Sesión presencial de socialización (4 horas)

Para la socialización presentaremos los productos de la Unidad de Formación 15.

Producto de la unidad de formación

Informe del proceso de articulación de las Áreas de Saberes y Conocimientos en función del PSP.

Ensayo elaborado por la CPTe a partir de la lectura obligatoria común.

Informe de la realización de las actividades propuestas en la Autoformación, en el Momento de Autoformación.

Bibliografía

CORTÉS Polanco, Claudio (2000). *La acústica, las ondas, su representación gráfica, aplicación tecnológica*, Ed. Alta Ingeniería, primera edición.

CABRERA Martín, María del Carmen (2009). Las funciones trigonométricas: aplicaciones y uso de herramientas TIC. Ed. Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas. Universidad Granada.

GODINO, Juan (2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. Edit. Proyecto Edumat-maestros, Universidad Granada.

CAREAGA Cantuta, Germán (2011). *Didáctica de la matemática. Un resumen práctico y aplicativo*. Ed. JIREH. La Paz Bolivia.

BENÍTEZ Jiménez, Elisa (2007). *Matemáticas y medios de comunicación*. Profesora Colegio Rafaela Ybarra. Madrid.







*“Juntos Implementamos el Currículo
e Impulsamos la Revolución Educativa”*

